Física Teórica 2

Pablo I. Tamborenea

Clase 1, 15/08/2023

Ecuación de ondas de una cuerda

La ecuación de ondas de una cuerda está dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \text{donde } v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{1}$$

Proponemos una solución factorizada en la que todos los puntos de la cuerda oscilan con la misma frecuencia ω:

$$u(x,t) = f(x)\cos(\omega t + \delta) \tag{2}$$

Reemplazando en la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{f(x)}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(\omega t + \delta) = -\frac{\omega^2}{v^2} f(x)\cos(\omega t + \delta) = -k^2 u(x,t), \tag{3}$$

con $k = \omega/v$, y sacando la dependencia temporal queda para $f(x)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2 f(x) = 0 \tag{4}$$

Esta es la ecuación del oscilador armónico, cuya solución conocemos. Para una cuerda de longitud L y extremos fijos queda

$$f(x) = A\sin(k_n x) \quad \text{con } k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n} \tag{5}$$

Agregando la dependencia temporal a los modos normales tenemos

$$u_n(x,t) = A\sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \delta_n) \quad \text{con } \omega_n = k_n v \tag{6}$$

Los modos normales $\sin(k_n x)$ son ortonormales y se normalizan

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x) \tag{7}$$

De modo que el "producto escalar o interno" de f_m y f_n es

$$(f_m, f_n) \equiv \int_0^L dx\, f_m^*(x) f_n(x) = \delta_{mn} \tag{8}$$

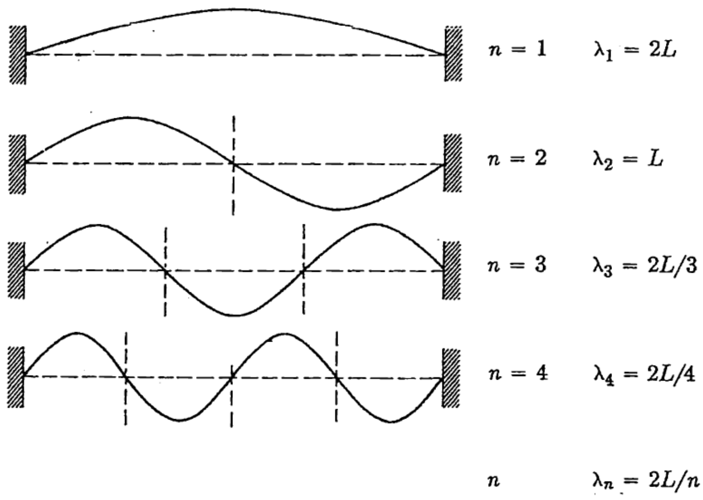

Figure 1: Modos de una cuerda con extremos fijos.

Y muy importante, forman una base completa de las funciones en el intervalo $(0, L)$. Cualquier estado de la cuerda $\phi(x)$ se puede desarrollar en esta base:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \tag{9}$$

Electrón en un pozo de potencial infinito: Espacio de Hilbert

Los estados del electrón son las llamadas "funciones de onda", $\psi(x)$.
$P(x) = |\psi(x)|^2$ es la densidad de probabilidad de encontrar al electrón en x.

Los autoestados de la energía (Hamiltoniano) de una partícula en un pozo de potencial infinito satisfacen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\varphi_n(x) = E_n\varphi_n(x) \tag{10}$$

con el potencial $V(x) = 0$ en $(0, L)$ e ∞ fuera de ese intervalo. Los estados que satisfacen

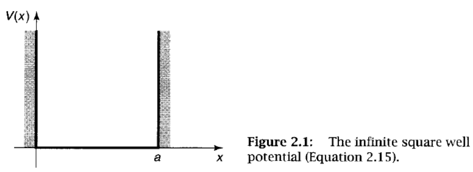

Figure 2: Pozo de potencial cuadrado infinito.

esta ecuación son iguales a los modos normales de la cuerda:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x) \quad \text{con } k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{11}$$

y los autovalores o energías propias son

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2} \tag{12}$$

De nuevo, estos autoestados del Hamiltoniano funcionan como una base de las funciones de onda del electrón

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{13}$$

donde $\psi(x), c_n \in \mathbb{C}$. Los estados de la partícula forman un espacio vectorial con producto interno, o sea, un espacio de Hilbert. El producto interno de nuevo está dado por

$$(\phi, \psi) \equiv \int_0^L dx\, \phi^*(x)\psi(x) \tag{14}$$

Y para los estados de la base ortonormal vale

$$(\varphi_m, \varphi_n) \equiv \int_0^L dx\, \varphi_m^*(x)\varphi_n(x) = \delta_{mn} \tag{15}$$

Para partículas en 3D tendremos $\phi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ y entonces el producto escalar o interno es

$$(\phi, \psi) \equiv \int d^3r\, \phi^*(\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r}) \tag{16}$$

Los estados de la partícula forman un espacio vectorial en el que se pueden hacer combinaciones lineales de los "vectores" o estados, y hay operadores lineales que no llevan de un estado a otro:

$$\hat{A}\psi(\mathbf{r}) = \psi'(\mathbf{r}) \tag{17}$$

que sea lineal significa que

$$\hat{A}[\lambda_1\psi_1(\mathbf{r}) + \lambda_2\psi_2(\mathbf{r})] = \lambda_1\hat{A}\psi_1(\mathbf{r}) + \lambda_2\hat{A}\psi_2(\mathbf{r}). \tag{18}$$

Ejemplos importantes de operadores son, $\hat{X}$ que actúa así:

$$\hat{X}\psi(\mathbf{r}) = x\psi(\mathbf{r}) \tag{19}$$

y el momento lineal $\hat{P}_x$

$$\hat{P}_x\psi(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{r}). \tag{20}$$

Acá para avanzar un poco más rápido les pido que lean la sección II.A del libro de Cohen-Tannoudji, Diu y Laloë, titulada *One-particle wave function space.* Las subsecciones 1 y 2 deberían ser un repaso de espacio vectorial aplicado a nuestro caso de funciones de onda, pero presten atención a la 2.d Closure relation, relación de clausura.

Es la relación matemática que cumplen las funciones de onda de una base $\{u_i(\mathbf{r})\}$ si son una base completa, ecuación (A-32):

$$\sum_i u_i(\mathbf{r})u_i^*(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{21}$$

Notación de Dirac

Las funciones de onda de cuadrado integrable son sólo un ejemplo de estados cuánticos. El otro ejemplo central de espacio de Hilbert cuántico es el que corresponde al grado de libertad de spin, que veremos más adelante. Vamos a introducir una nueva notación para los elementos del espacio de Hilbert $\mathcal{F}$, que resulta muy conveniente para los cálculos.

Llamamos "ket", $|\psi\rangle$, al estado del sistema cuántico, que es un elemento o vector del espacio de Hilbert

$$|\psi\rangle \in \mathcal{F} \tag{22}$$

Podemos hacer combinaciones lineales de kets

$$|\psi\rangle = \lambda_1|\varphi_1\rangle + \lambda_2|\varphi_2\rangle \tag{23}$$

y también el producto interno o escalar:

$$(|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle) = \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle \tag{24}$$

Noten que "dimos vuelta" el ket $|\varphi_1\rangle$ y lo convertimos en el "bra" $\langle\varphi_1|$. De esta forma, el producto escalar de dos kets se escribe como un "bra-ket". Esto lo inventó Dirac :)

Linealidad y antilinealidad del producto escalar

En principio todavía no tenemos definido como será el producto interno entre los kets, pero le pediremos que cumpla ciertas propiedades básicas del producto escalar en el espacio de Hilbert que ya conocemos. Inspirados en el producto escalar de funciones de onda

$$(\phi, \psi) \equiv \int d^3r\, \phi^*(\mathbf{r})\, \psi(\mathbf{r}) \tag{25}$$

vamos a pedir que el producto escalar sea siempre lineal en el segundo argumento. Supongamos que $|\varphi\rangle$ es una combinación lineal de kets:

$$|\varphi\rangle = \lambda_1|\varphi_1\rangle + \lambda_2|\varphi_2\rangle \tag{26}$$

y queremos calcular el producto escalar $(|\psi\rangle, |\varphi\rangle)$. Hacemos

$$(|\psi\rangle, |\varphi\rangle) = (|\psi\rangle, \lambda_1|\varphi_1\rangle + \lambda_2|\varphi_2\rangle) = \lambda_1(|\psi\rangle, |\varphi_1\rangle) + \lambda_2(|\psi\rangle, |\varphi_2\rangle) \tag{27}$$

que en notación de Dirac queda:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|\big(\lambda_1|\varphi_1\rangle + \lambda_2|\varphi_2\rangle\big) = \lambda_1\langle\psi|\varphi_1\rangle + \lambda_2\langle\psi|\varphi_2\rangle \tag{28}$$

Por otro lado, pedimos que sea *antilineal* en el primer argumento, o sea

$$\begin{aligned}
(|\varphi\rangle, |\psi\rangle) &= (\lambda_1|\varphi_1\rangle + \lambda_2|\varphi_2\rangle, |\psi\rangle) && (29)\\
&= \lambda_1^*(|\varphi_1\rangle, |\psi\rangle) + \lambda_2^*(|\varphi_2\rangle, |\psi\rangle) && (30)\\
&= \lambda_1^*\langle\varphi_1|\psi\rangle + \lambda_2^*\langle\varphi_2|\psi\rangle && (31)\\
&= \big(\lambda_1^*\langle\varphi_1| + \lambda_2^*\langle\varphi_2|\big)|\psi\rangle && (32)\\
&= \langle\varphi|\psi\rangle && (33)
\end{aligned}$$

Podemos decir entonces que la correspondencia entre ket y bra es antilineal:

$$|\varphi\rangle = \lambda_1|\varphi_1\rangle + \lambda_2|\varphi_2\rangle \longrightarrow \langle\varphi| = \lambda_1^*\langle\varphi_1| + \lambda_2^*\langle\varphi_2| \tag{34}$$

Quizás sea útil pensar a los bra como:

$$\langle\varphi| = (|\varphi\rangle, \cdots) \tag{35}$$

Se lo aplico a un ket y me da un número.

Fin de la clase 1