Física Teórica 2

Pablo I. Tamborenea

Clase 2, 18/08/2023

Propiedades del producto escalar en notación de Dirac

Habíamos presentado el producto interno o escalar de kets:

$$(|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle) = \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle, \tag{1}$$

que es una generalización del producto escalar de funciones de onda

$$(\varphi_1, \varphi_2) \equiv \int d^3r\, \varphi_1^*(\mathbf{r})\, \varphi_2(\mathbf{r}). \tag{2}$$

Debe satisfacer las propiedades:

(1) $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$

(2) $\langle\varphi|\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2\rangle = \lambda_1\langle\varphi|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle\varphi|\psi_2\rangle$

(3) $\langle\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2|\psi\rangle = \lambda_1^*\langle\varphi_1|\psi\rangle + \lambda_2^*\langle\varphi_2|\psi\rangle$

(4) $\langle\psi|\psi\rangle$ real, positivo. Es la norma al cuadrado de $|\psi\rangle \to \||\psi\rangle\|^2$,

La clase pasada analizamos la (3). Repitamosló acá usando en la primera línea la notación abreviada $|\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2|\psi\rangle &= (|\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle, |\psi\rangle) && (3)\\
&= (\lambda_1|\varphi_1\rangle + \lambda_2|\varphi_2\rangle, |\psi\rangle) && (4)\\
&= \lambda_1^*\,(|\varphi_1\rangle, |\psi\rangle) + \lambda_2^*\,(|\varphi_2\rangle, |\psi\rangle) && (5)\\
&= \lambda_1^*\,\langle\varphi_1|\psi\rangle + \lambda_2^*\,\langle\varphi_2|\psi\rangle && (6)
\end{aligned}$$

Chequeemos que el producto escalar de funciones de onda satisface la condición (1):

$$\begin{aligned}
(\varphi_1, \varphi_2) &= \int d^3r\, \varphi_1^*(\mathbf{r})\, \varphi_2(\mathbf{r}) && (7)\\
&= \left[\int d^3r\, \varphi_1(\mathbf{r})\, \varphi_2^*(\mathbf{r})\right]^* && (8)\\
&= \left[\int d^3r\, \varphi_2^*(\mathbf{r})\, \varphi_1(\mathbf{r})\right]^* && (9)\\
&= (\varphi_2, \varphi_1)^* && (10)
\end{aligned}$$

Operadores en notación de Dirac

Sea un operador $\hat{A} \longrightarrow \hat{A}\,|\psi\rangle = |\psi'\rangle$

Veamos un ejemplo sencillo de operador construído con dos estados $|\varphi\rangle$ y $|\psi\rangle$. Por un lado, $\langle\varphi|\psi\rangle \in \mathbb{C}$ es un número complejo, pero en cambio

$$\hat{A} = |\varphi\rangle\langle\psi| \tag{11}$$

es un operador ya que se puede aplicar a un estado $|\chi\rangle$ y se obtiene

$$\hat{A}|\chi\rangle = |\varphi\rangle\langle\psi|\chi\rangle \tag{12}$$

Vemos que es una especie de *Operador de Transición.* Vemos que en la notación de Dirac en general importa el orden de los elementos en una expresión.

Otro ejemplo: *Operador Proyector*

$$\mathbb{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|. \tag{13}$$

Si lo aplicamos sobre un estado $|\varphi\rangle$ se obtiene

$$\mathbb{P}_\psi|\varphi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle \tag{14}$$

Es un estado paralelo a $|\psi\rangle$ con módulo $\langle\psi|\varphi\rangle$. $\mathbb{P}_\psi$ proyecta sobre $|\psi\rangle$!

Notar que $\mathbb{P}_\psi^2 = \mathbb{P}_\psi$
es una característica propia de los proyectores.

Bases y representaciones en el espacio de estados

Sea una base ortonormal de estados o kets del espacio de Hilbert: $\{|u_i\rangle\}$, con $\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}$. Podemos expandir cualquier ket $|\psi\rangle$ en la base:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i|u_i\rangle \tag{15}$$

Los coeficientes de la expansión salen de proyectar

$$\langle u_j|\psi\rangle = \sum_i c_i\langle u_j|u_i\rangle \;\; = \sum_i c_i\delta_{ij} = c_j \tag{16}$$

Volviendo a la expansion del ket escribimos

$$|\psi\rangle = \sum_i \langle u_i|\psi\rangle|u_i\rangle \;\; = \sum_i |u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle \tag{17}$$

Vemos que la completitud de la base resulta en:

$$\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1} \tag{18}$$

En palabras: proyectar sobre todos los estados de la base es la identidad, o sea que no queda ningún subespacio afuera.

Los coeficientes c_i representan al estado $|\psi\rangle$ y los presentamos como un vector columna

$$|\psi\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{19}$$

Los operadores también se representan en la base por medio de sus elementos de matriz: $A_{ij} = \langle u_i|\hat{A}|u_j\rangle$, o sea

$$\hat{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1|\hat{A}|u_1\rangle & \langle u_1|\hat{A}|u_2\rangle & \langle u_1|\hat{A}|u_3\rangle & \cdots \\ \langle u_2|\hat{A}|u_1\rangle & \langle u_2|\hat{A}|u_2\rangle & \langle u_2|\hat{A}|u_3\rangle & \cdots \\ \langle u_3|\hat{A}|u_1\rangle & \langle u_3|\hat{A}|u_2\rangle & \langle u_3|\hat{A}|u_3\rangle & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \tag{20}$$

Entonces el estado $|\varphi\rangle = A|\psi\rangle$, que podemos expandir como $|\varphi\rangle = \sum_i d_i|u_i\rangle$, tiene coeficientes

$$\begin{aligned} d_i = \langle u_i|\varphi\rangle &= \langle u_i|A|\psi\rangle && (21) \\ &= \langle u_i|A\mathbb{1}|\psi\rangle && (22) \\ &= \langle u_i|A\sum_j |u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle && (23) \\ &= \sum_j \langle u_i|A|u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle && (24) \\ &= \sum_j A_{ij}c_j && (25) \end{aligned}$$

Es decir que $A|\psi\rangle$ se calcula como el producto de la matriz de A por el vector columna de $|\psi\rangle$. Notar el truco muy útil de insertar la identidad expresada con los estados de la base. Detalle importante, usar un índice distinto dentro de la suma!

Enntonces, en forma matricial, los coeficientes d_i están dados por

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{26}$$

Fin de la clase 2