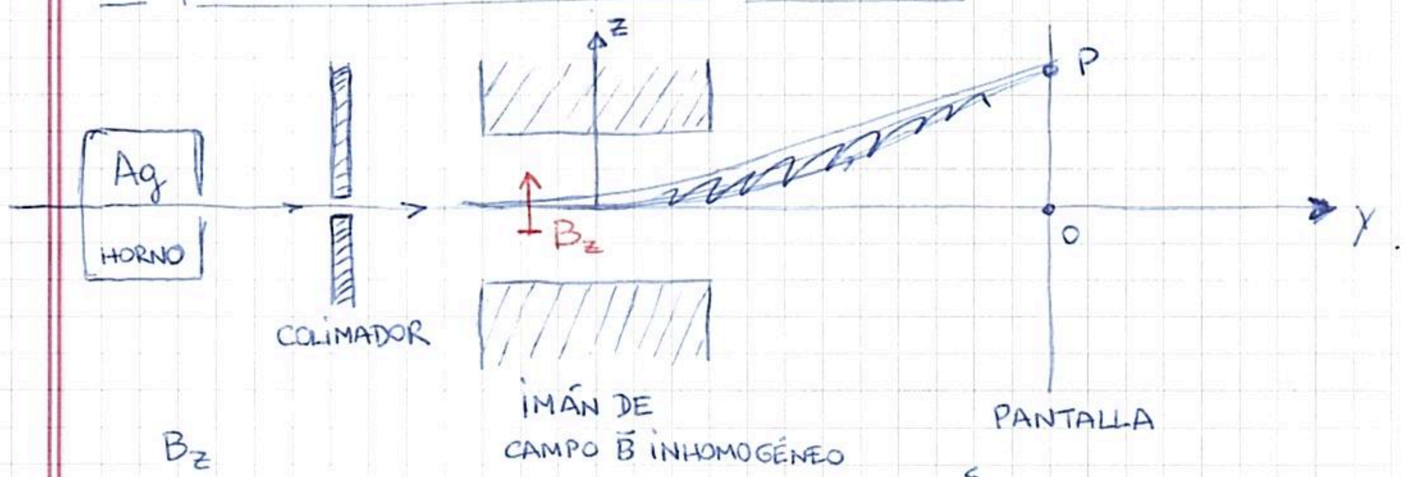
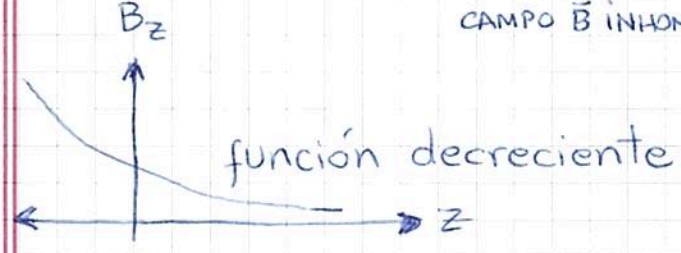
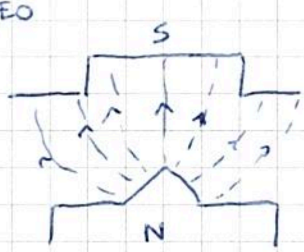
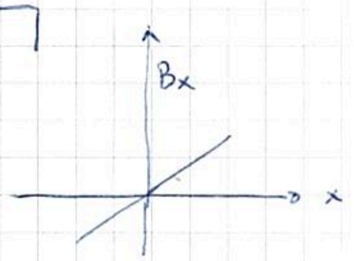
1/9/15

Experimento de Stern- Gerlach









Átomos de Ag:

Momento magnético : $\vec{M}$ $\Big\}$ $\vec{M} = \gamma \vec{S}$

" angular : $\vec{S}$

Energía potencial : $W = -\vec{M} \cdot \vec{B}$

$M_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + M_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$

Fuerza en campo magnético no uniforme : $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{M} \cdot \vec{B})$ $\quad B_y = 0$

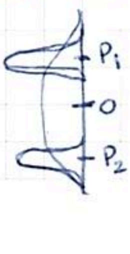
La componente M_x describe una rápida oscilación y se puede despreciar al evaluar el movimiento de los átomos.

$$\vec{F} = M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{z}$$

Los átomos de Ag impactan en la pantalla y dejan una marca.

¿Qué resultado esperamos clásicamente?

Como los $\vec{M}$ vienen con una distribución isótropa, tendremos un rango completo de M_z entre $-|\vec{M}|$ y $|\vec{M}|$.



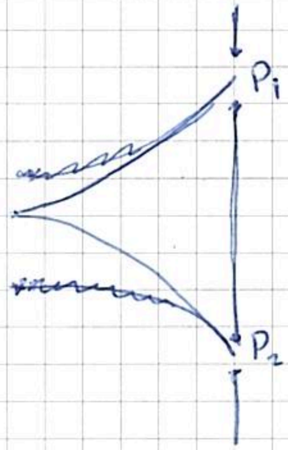
Marcas observadas en la pantalla.
(El ancho depende de detalles experimentales)

Interpretación cuántica: S_z es una cantidad cuantizada que solo puede tomar dos valores: $\pm \frac{\hbar}{2}$.

La descripción completa del estado de la partícula requiere dos partes en la función de onda:

$$[\psi] = \psi_+(\vec{r})|+\rangle + \psi_-(\vec{r})|-\rangle$$

$$\begin{cases} \psi_+(\vec{r}) \text{ describe una trayectoria} \\ \psi_-(\vec{r}) \quad '' \quad '' \quad '' \end{cases}$$



$\psi_+(\vec{r})$ o $\psi_-(\vec{r})$ ~~pueden ser~~ son cero solo si el espín está bien definido y es $|+\rangle$ o $|-\rangle$

Haciendo un orificio en P_1 o P_2 podemos seleccionar átomos con espín $\uparrow$ o $\downarrow$, respectivamente.

<u>Momento angular de espín</u>

[Por el momento ignoramos la parte orbital y vemos el espacio de estados de espín]

Observable S_z, con:

$$\begin{cases} S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle \\ S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle \end{cases}$$

Dos autovalores no degenerados

En la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, la matriz de S_z es:

$$(S_z) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle +|S_z|+\rangle & \langle +|S_z|-\rangle \\ \langle -|S_z|+\rangle & \langle -|S_z|-\rangle \end{pmatrix}$$

Relación de clausura:

$$\mathbb{I} = |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|$$

Estado general:

$$|\psi\rangle = \mathbb{I}|\psi\rangle = |+\rangle\langle+|\psi\rangle + |-\rangle\langle-|\psi\rangle$$

$$= a|+\rangle + b|-\rangle$$

Normalización: $|a|^2 + |b|^2 = 1$

<u>Observables S_x y S_y</u>

Veremos que:

$$(S_x) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (S_y) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

De hecho, podemos escribir la matriz de $S_{\hat{u}}$,

donde $\hat{u} = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$

$$\Rightarrow S_{\hat{u}} = \vec{S}\cdot\hat{u} = S_x\, s\theta\, c\varphi + S_y\, s\theta\, s\varphi + S_z\, c\theta$$

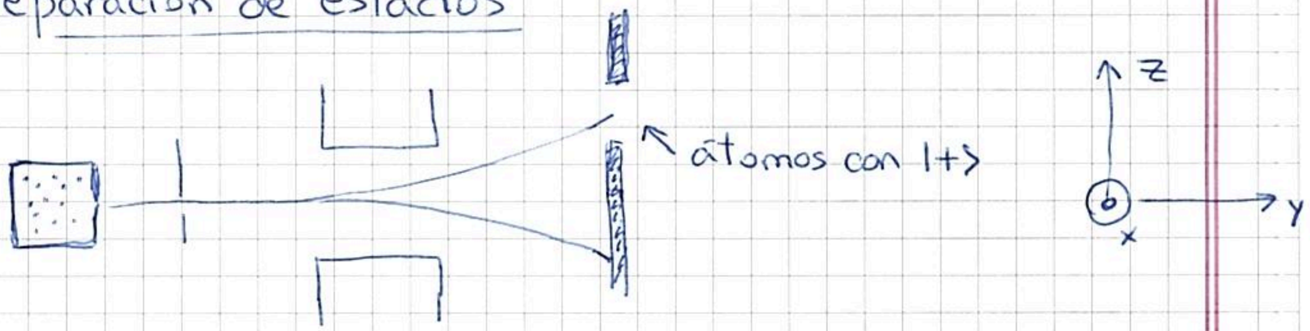
$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} c\theta & s\theta\, e^{-i\varphi} \\ s\theta\, e^{i\varphi} & -c\theta \end{pmatrix}.$$

Autovalores: $\pm\frac{\hbar}{2}$ y autovectores:

$$\begin{cases} |+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi}|-\rangle \\ |-\rangle_u = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi}|-\rangle \end{cases}$$

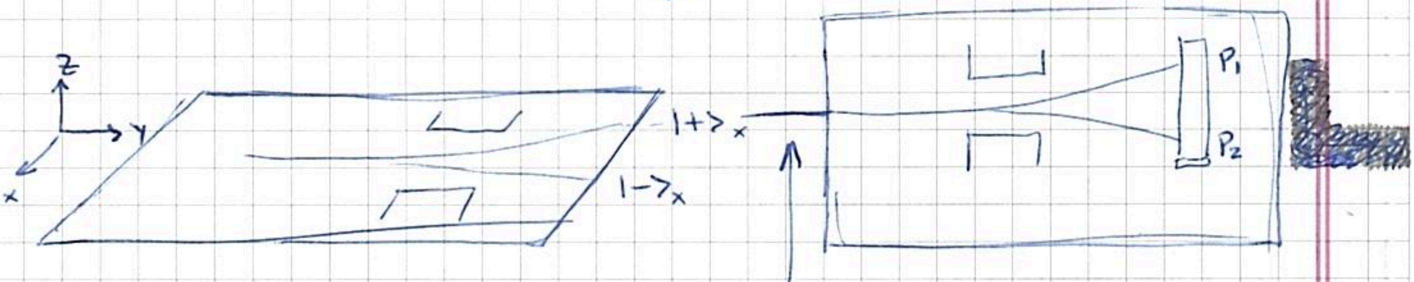
Si $\hat{u} = \hat{x}$, $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \\ |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \end{cases}$

Preparación de estados



Si rotamos el aparato 90° $(\theta = \frac{\pi}{2})$ podemos oblener átomos con

estado de espín $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$



$$|\psi\rangle = |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

Obtenemos marcas en P_1 y P_2 con prob. $\frac{1}{2}$

Si rotamos el primer setup un ángulo θ y obtenemos

Ag con estado $|+\rangle_u = |\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|-\rangle$

Al medir en la pantalla P obtenemos

$$\mathcal{P}(P_1) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\mathcal{P}(P_2) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$