15/6/16

Las representaciones $\{|\vec{r}\rangle\}$ y $\{|\vec{p}\rangle\}$

El espacio de Hilbert para una partícula con 3 grados de libertad espaciales es $\mathcal{F}$, el ~~espacio~~ espacio de las funciones de onda "suaves" de cuadrado integrable.

Vimos las bases especiales:

$$\xi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \qquad v_{\vec{p}_0}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{p}_0\cdot\vec{r}/\hbar}$$

Teníamos la correspondencia $\varphi(\vec{r}) \longrightarrow |\varphi\rangle$

A pesar de que no son verdaderas funciones de onda les asociamos kets en $\mathcal{E}_{\vec{r}}$:

$$\xi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) \longleftrightarrow |\vec{r}_0\rangle$$

$$v_{\vec{p}_0}(\vec{r}) \longleftrightarrow |\vec{p}_0\rangle$$

Estos ~~forman~~ kets forman dos bases o "representaciones" muy útiles en $\mathcal{E}_{\vec{r}}$

$\{|\vec{r}_0\rangle\}$: representación de coordenadas.

$\{|\vec{p}_0\rangle\}$: representación de momentos.

Estas bases tienen índices continuos $\vec{r}_0$ y $\vec{p}_0$

Ya vimos la ortonormalidad y relaciones de clausura:

$$\langle\vec{r}_0|\vec{r}_0'\rangle = \delta(\vec{r}_0-\vec{r}_0') \qquad \int d^3r_0\, |\vec{r}_0\rangle\langle\vec{r}_0| = \mathbb{1}$$

$$\langle\vec{p}_0|\vec{p}_0'\rangle = \delta(\vec{p}_0-\vec{p}_0') \qquad \int d^3p_0\, |\vec{p}_0\rangle\langle\vec{p}_0| = \mathbb{1}$$

donde $\langle\vec{r}_0|\vec{r}_0'\rangle = \int d^3r\, \xi^*_{\vec{r}_0}(\vec{r})\, \xi_{\vec{r}_0'}(\vec{r}) = \int d^3r\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0')$

$$\langle\vec{p}_0|\vec{p}_0'\rangle = \int d^3r\, v^*_{\vec{p}_0}(\vec{r})\, v_{\vec{p}_0'}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3r\, e^{-i\vec{p}_0\cdot\vec{r}/\hbar}\, e^{i\vec{p}_0'\cdot\vec{r}/\hbar}$$

15/6/16

Componentes de un ket $|\psi\rangle$ en bases $\{|\vec{r}_0\rangle\}$ y $\{|\vec{p}_0\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int d^3r_0 \, |\vec{r}_0\rangle\langle\vec{r}_0|\psi\rangle$$

$$= \int d^3r_0 \, |\vec{r}_0\rangle \int d^3r \; \xi^*_{\vec{r}_0}(\vec{r})\,\psi(\vec{r})$$

$$= \int d^3r_0 \, |\vec{r}_0\rangle \int d^3r \; \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,\psi(\vec{r})$$

$$= \int d^3r_0 \; \psi(\vec{r}_0)\, |\vec{r}_0\rangle$$

Entonces $\psi(\vec{r}_0)$ es el coeficiente de $|\psi\rangle$ en su expansión en la base $\{|\vec{r}_0\rangle\}$.

podemos decir: ① (ver ① abajo)

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int d^3p_0 \, |\vec{p}_0\rangle\langle\vec{p}_0|\psi\rangle$$

$$= \int d^3p_0 \, |\vec{p}_0\rangle \int v^*_{\vec{p}_0}(\vec{r})\,\psi(\vec{r})\, d^3r$$

$$= \int d^3p_0 \, |\vec{p}_0\rangle \int d^3r \, \frac{e^{i\vec{p}_0\cdot\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,\psi(\vec{r})$$

$$= \int d^3p_0 \; \bar{\psi}(\vec{p}_0)\, |\vec{p}_0\rangle$$

→ ②

$\bar{\psi}(\vec{p}_0)$ es el coeficiente en la base $\{|\vec{p}_0\rangle\}$

Ya podemos quitar el cerito y escribir directamente los estados de la base como $\{|\vec{r}\rangle\}$ y $\{|\vec{p}\rangle\}$.

$\langle\vec{r}|\psi\rangle = \psi(\vec{r})$ ① $\langle\vec{r}|\psi\rangle = \int d^3r_0 \, \psi(\vec{r}_0)\,\langle\vec{r}|\vec{r}_0\rangle = \psi(\vec{r})$

$\langle\vec{p}|\psi\rangle = \bar{\psi}(\vec{p})$ ② $\langle\vec{p}|\psi\rangle = \int d^3p_0 \, \bar{\psi}(\vec{p}_0)\,\langle\vec{p}|\vec{p}_0\rangle = \bar{\psi}(\vec{p})$

16/6/16 Operador posición $\vec{R} = (x, y, z)$

Sabemos como actúa sobre las funciones de onda:

$$\hat{X}\,\psi(\vec{r}) = x\,\psi(\vec{r}) = \psi'(\vec{r})$$

Su acción sobre el ket $|\psi\rangle$ está dada por eso:

$$\hat{X}\,|\psi\rangle = |\psi'\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle\vec{r}|\hat{X}|\psi\rangle = \langle\vec{r}|\psi'\rangle = \psi'(\vec{r}) = x\,\psi(\vec{r})$$

22/6/16 En la representación $\{|\vec{r}\rangle\}$, $\hat{X}$ actúa multiplicando por x.

Lo definimos como operador que actúa sobre los kets de $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ a través de su acción en la representación $\{|\vec{r}\rangle\}$.

Análogamente:

$$\langle\vec{r}|X|\psi\rangle = x\,\langle\vec{r}|\psi\rangle$$
$$\langle\vec{r}|Y|\psi\rangle = y\,\langle\vec{r}|\psi\rangle$$
$$\langle r|Z|\psi\rangle = z\,\langle\vec{r}|\psi\rangle$$

donde $\vec{r} = (x, y, z)$

Podemos pensar a los operadores X, Y, Z como "componentes" de un "operador vectorial", $\vec{R}$.
Después veremos la justificación, cuando estudiemos las rotaciones.

Elemento de matriz de X

$$\langle\varphi|X|\psi\rangle = \langle\varphi|\mathbb{1}\,X|\psi\rangle = \langle\varphi|\left(\int d^3r\,|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\right)X|\vec{r}\rangle$$
$$= \int d^3r\,\langle\varphi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|X|\psi\rangle = \int d^3r\,\varphi^*(\vec{r})\,x\,\psi(\vec{r})$$

Operador momento $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$

Se define $\vec{P}$ por su acción en la representación $\{|\vec{p}\rangle\}$:

$$\langle \vec{p}\,|P_x|\psi\rangle = p_x \langle \vec{p}\,|\psi\rangle = p_x\,\bar{\psi}(\vec{p})$$

$$\langle \vec{p}\,|P_y|\psi\rangle = p_y \langle \vec{p}\,|\psi\rangle = p_y\,\bar{\psi}(\vec{p})$$

$$\langle \vec{p}\,|P_z|\psi\rangle = p_z \langle \vec{p}\,|\psi\rangle = p_z\,\bar{\psi}(\vec{p})$$

Es importante conocer su acción en la representación $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$\langle \vec{r}\,|P_x|\psi\rangle = \int d^3p \,\langle \vec{r}\,|\vec{p}\rangle\langle \vec{p}\,|P_x|\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3p\; e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\,\underbrace{p_x\,\bar{\psi}(\vec{p})} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(\vec{r})$$

Esto es la transformada de Fourier de $p_x\,\bar{\psi}(\vec{p})$.

Se puede ver que:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\psi\right] = \left(\frac{i p_x}{\hbar}\right)^n \bar{\psi}(\vec{p})$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar}{i}\,\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial x}\psi\right] = p_x\,\bar{\psi}(\vec{p})$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3x\; e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}\,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(\vec{x}) = p_x\,\bar{\psi}(\vec{p})$$

$\Rightarrow \langle \vec{r}\,|P_x|\psi\rangle =$ [redacted] $\cancel{\int d^3p \int d^3r\, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(\vec{r})}$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3p\; e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\,\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r'\; e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}'/\hbar}\,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'}\psi(\vec{r}\,')$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r' \; \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'} \psi(\vec{r}\,') \int d^3p \; e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')/\hbar}$$

$$= \int d^3r' \; \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x'} \psi(\vec{r}\,') \; \delta(\vec{r}\,'-\vec{r}) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(\vec{r}) \qquad \text{(E-26)}$$

23/6/16 O sea, en la representación $\{|\vec{r}\rangle\}$:

$$\vec{P} \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$$

Elemento de matriz de $\hat{P}_x$ calculado usando $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$\langle\varphi|P_x|\psi\rangle = \int d^3r \; \langle\varphi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|P|\psi\rangle$$

$$= \int d^3r \; \varphi^*(\vec{r}) \; \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(\vec{r})$$

Relación fundamental: $[X, P_x] = i\hbar$

$$\langle\vec{r}|\,[X, P_x]\,|\psi\rangle = \langle\vec{r}|\; XP_x - P_xX \;|\psi\rangle$$

$$= x\,\langle\vec{r}|P_x|\psi\rangle - \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\langle\vec{r}|X|\psi\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{i}\,x\,\frac{\partial}{\partial x}\langle\vec{r}|\psi\rangle - \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\,x\,\langle\vec{r}|\psi\rangle$$

$$= i\hbar\,\langle\vec{r}|\psi\rangle$$

Válido para todo $|\psi\rangle$ y $|\vec{r}\rangle$

$$\Rightarrow [X, P_x] = i\hbar\,\mathbb{1}$$

Relaciones Canónicas de conmutación:

$[R_i, R_j] = 0$

$[P_i, P_j] = 0$ $\qquad [R_i, P_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$ $\qquad i,j = 1,2,3$

Hermiticidad de R_i y P_i

$$\langle \varphi | x | \psi \rangle = \int d^3r \; \varphi^*(\vec{r}) \; x \; \psi(\vec{r})$$

$$= \left[\int d^3r \; \psi^*(\vec{r}) \; x \; \varphi(\vec{r}) \right]^*$$

$$= \langle \psi | x | \varphi \rangle^* \qquad ///$$

Hermiticidad de P_x:

$$\langle \varphi | P_x | \psi \rangle = \int d^3r \; \varphi^*(\vec{r}) \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi(\vec{r})$$

$$= \frac{\hbar}{i} \int dy\, dz \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \varphi^*(\vec{r}) \; \frac{\partial}{\partial x} \psi(\vec{r})$$

$$= \frac{\hbar}{i} \int dy\, dz \left[\underbrace{\varphi^*(\vec{r})\, \psi(\vec{r}) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{\text{las funciones de onda tienden a cero en } x \to \pm\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \psi(\vec{r}) \; \frac{\partial}{\partial x} \varphi^*(\vec{r}) \right]$$

$$= -\frac{\hbar}{i} \int d^3r \; \psi(\vec{r}) \; \frac{\partial}{\partial x} \varphi^*$$

$$= \left[\frac{\hbar}{i} \int d^3r \; \psi^*(\vec{r}) \; \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\vec{r}) \right]^* = \langle \psi | P_x | \varphi \rangle^*$$

Autovectores de X

Vimos: $\langle \vec{r} | X | \psi \rangle = x \langle \vec{r} | \psi \rangle$

Entonces: cuánto vale $X | \vec{r}_0 \rangle$?

$$\langle \vec{r} | X | \vec{r}_0 \rangle = x \langle \vec{r} | \vec{r}_0 \rangle = x\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = x_0\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = x_0 \langle \vec{r} | \vec{r}_0 \rangle$$

$$\Rightarrow X | \vec{r}_0 \rangle = x_0 | \vec{r}_0 \rangle, \text{ en gral: } \begin{cases} X | \vec{r} \rangle = x | \vec{r} \rangle \\ Y | \vec{r} \rangle = y | \vec{r} \rangle \\ Z | \vec{r} \rangle = z | \vec{r} \rangle \end{cases} \quad \forall \vec{r}$$

Entonces, $|\vec{r}\rangle$ es autovector común de X, Y, Z, que conmutan entre sí. Los "índices" que etiquetan el estado son (x, y, z).

Autovectores de $\vec{P}$

Lo mismo ocurre con los autovectores de P_x, P_y y P_z.

24/6/2016 Trabajando en la representación $\{|\vec{p}\rangle\}$ se obtiene:

$$P_x |\vec{p}\rangle = p_x |\vec{p}\rangle$$
$$P_y |\vec{p}\rangle = p_y |\vec{p}\rangle$$
$$P_z |\vec{p}\rangle = p_z |\vec{p}\rangle$$

Notar que esto mismo se puede demostrar trabajando en la representación $\{|\vec{r}\rangle\}$:

$$\langle \vec{r} | P_x | \vec{p}\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\langle \vec{r}|\vec{p}\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{i}{\hbar}p_x e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} = p_x \langle \vec{r}|\vec{p}\rangle$$

$$\Rightarrow P_x|\vec{p}\rangle = p_x|\vec{p}\rangle \qquad ///$$

$\vec{R}$ y $\vec{P}$ son observables

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } \{|\vec{r}\rangle\} \text{ y } \{|\vec{p}\rangle\} \text{ son bases} \\ \vec{R} \text{ y } \vec{P} \text{ son hermíticos} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{R} \text{ y } \vec{P} \text{ son observables}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{X, Y, Z\} \\ \{P_x, P_y, P_z\} \end{array}\right\} \text{son C.C.O.C. de } \mathcal{E}_{\vec{r}}$$