5/9/16

Oscilador armónico

$$F = -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

solución clásica: $x(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Energía potencial: $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

Importancia, generalidad: cualquier mínimo de potencial se aproxima con un potencial cuadrático.

Haciendo $x \to X$, $p \to P$ obtenemos el Hamiltoniano cuántico:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2X^2$$

Queremos resolver el problema de autovalores:

$$H|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$$

Trabajando en la representación de coordenadas $\{|x\rangle\}$

$$\Rightarrow \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

Propiedades generales

(i) $E > E_{min} = 0$

(ii) El espectro de energía es discreto (estados todos ligados)

(iii) $V(x)$ es par $\Rightarrow \varphi(x)$ par o impar.

5/9/16

Adimensionalizamos:

$$\tilde{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, X \qquad \tilde{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\, P$$

$$[X, P] = i\hbar \Rightarrow [\tilde{X}, \tilde{P}] = i$$

$$\Rightarrow H = \hbar\omega \tilde{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\tilde{X}^2 + \tilde{P}^2\right)$$

Esto parece: $u^2 + v^2 = (u - iv)(u + iv)$

Introducimos operadores:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{X} + i\tilde{P}\right) \\ a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{X} - i\tilde{P}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^+ + a\right) \\ \tilde{P} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(a^+ - a\right) \end{cases}$$

a y a^+ no son hermíticos, son adjuntos uno del otro.

Veamos el conmutador:

$$[a, a^+] = \frac{1}{2}\left[\tilde{X} + i\tilde{P}, \tilde{X} - i\tilde{P}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-i[\tilde{X}, \tilde{P}] + i[\tilde{P}, \tilde{X}]\right) = \boxed{1}$$

Vemos que el H se puede escribir en términos de a y a^+ muy sencillo:

$$a^+ a = \frac{1}{2}\left(\tilde{X} - i\tilde{P}\right)\left(\tilde{X} + i\tilde{P}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tilde{X}^2 + \tilde{P}^2 + \underbrace{i\tilde{X}\tilde{P} - i\tilde{P}\tilde{X}}_{-1}\right)$$

5/9/16

$$\Rightarrow \quad H = \left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \equiv \left(N + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

También se puede escribir : $H = \left(a a^+ - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

Operadores de subida y bajada (creación y destrucción)

Sup. $H|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$

Mostrar que $a^+|\varphi\rangle$ satisface : $H\, a^+|\varphi\rangle = (E+\hbar\omega)\, a^+|\varphi\rangle$

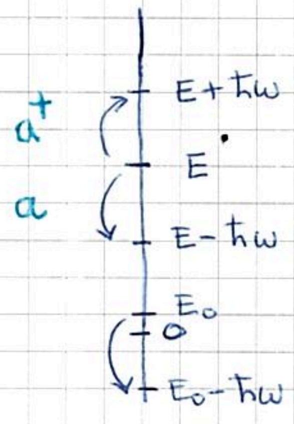
$$[a, a^+] = 1$$
$$a a^+ - a^+ a = 1$$
$$a a^+ = a^+ a + 1$$

$$\begin{aligned}
H\, a^+|\varphi\rangle &= \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2}\right) a^+ |\varphi\rangle \\
&= \hbar\omega \left(a^+ a a^+ + \frac{a^+}{2}\right) |\varphi\rangle \\
&= \hbar\omega \left[a^+ (a^+ a + 1) + \frac{a^+}{2}\right] |\varphi\rangle \\
&= \hbar\omega\, a^+ \left(a^+ a + \frac{1}{2} + 1\right) |\varphi\rangle \\
&= a^+ (H + \hbar\omega) |\varphi\rangle \\
&= a^+ (E + \hbar\omega) |\varphi\rangle = (E+\hbar\omega) a^+ |\varphi\rangle \qquad ///
\end{aligned}$$

Entonces, $a^+|\varphi\rangle$ satisface la ESIT con autovalor $E+\hbar\omega$

Igualmente:

$$H\, a|\varphi\rangle = (E - \hbar\omega)|\varphi\rangle$$



Aplicando a repetidamente

llegamos a estado $|\varphi_0\rangle$ tal que:

$$a|\varphi_0\rangle = 0$$

Porque $a|\varphi_0\rangle$ es autoestado de H pero no puede tener energía debajo del mínimo. (Ver prob. 2.2 y 2.11 de Griffiths)

5/9/16

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{X} + i\tilde{P}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{X} + \frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}\,\hat{P}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x + \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\frac{d}{dx}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{d}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{d}{dx}\right)\varphi_0(x) = 0$$

DETERMINACIÓN DEL ESTADO FUNDAMENTAL

$$\Rightarrow \varphi_0(x) = A_0\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

con $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (verificar)

El resto de las autofunciones se obtiene aplicando a^+

$$\varphi_n(x) = A_n\, a^{+n}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

y $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

16/09/2019

Explícitamente, los autoestados normalizados son:

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,H_n\Big(\underbrace{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x}_{\equiv\,\xi}\Big)\,e^{-\xi^2/2}$$

$H_n(\xi)$ son los polinomios de Hermite. Ejemplos:

$H_0 = 1$

$H_1 = 2\xi$

$H_2 = 4\xi^2 - 2$

$H_3 = 8\xi^3 - 12\xi$

$H_4 = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$

$H_5 = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi$

Notar que tienen paridad bien definida.

Dos problemas de Griffiths

Problema 2.2

Mostrar que E debe exceder el valor mínimo de $V(x)$ para toda solución normalizable de la ESIT.

¿Cuál es el análogo clásico de esta afirmación?

Hint: reescribir

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]\psi$$

Si $E < V_{min}$, entonces ψ y su derivada segunda siempre tienen el mismo signo – argumentar que una solución así no puede ser normalizada.

Problema 2.11

Mostrar que el operador de bajada no puede generar un estado con norma infinita (o sea, $\int |a\psi|^2 dx < \infty$) si ψ mismo es una solución normalizada de la ESIT)

Hint: usar integración por partes para mostrar que:

$$\int (a\psi)^* (a\psi)\, dx = \int \psi^* (a^\dagger a\, \psi)\, dx$$

Entonces invocar la Ec. de Schrödinger: $\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,\psi = E\psi$ para obtener:

$$\int |a\psi|^2\, dx = E - \frac{1}{2}\hbar\omega$$

donde E es la energía del estado ψ.