

La clase pasada vimos:

- Probabilidad de transición
- Tratamiento perturbativo dependiente del tiempo
- Perturbación constante
- Regla de oro de Fermi

En esta clase veremos:

- Sistemas cuánticos de varias partículas
- Definición del problema de partículas idénticas
- Postulado de simetrización con dos partículas
- Operadores de permutación de N partículas

Evolución del estado en el *picture* de interacción

$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_n c_n(t) |n\rangle$$

$$i\hbar \dot{c}_n(t) = \sum_m V_{nm}(t) e^{i\omega_{nm}t} c_m(t)$$

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12}e^{i\omega_{12}t} & \cdots \\ V_{21}e^{i\omega_{21}t} & V_{22} & \cdots \\ & & V_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Tratamiento perturbativo dependiente del tiempo

$$c_n(t) = c_n^{(0)} + c_n^{(1)} + c_n^{(2)} + \dots$$

$$c_n^{(0)}(t) = \langle n | 1 | i \rangle = \delta_{ni}$$

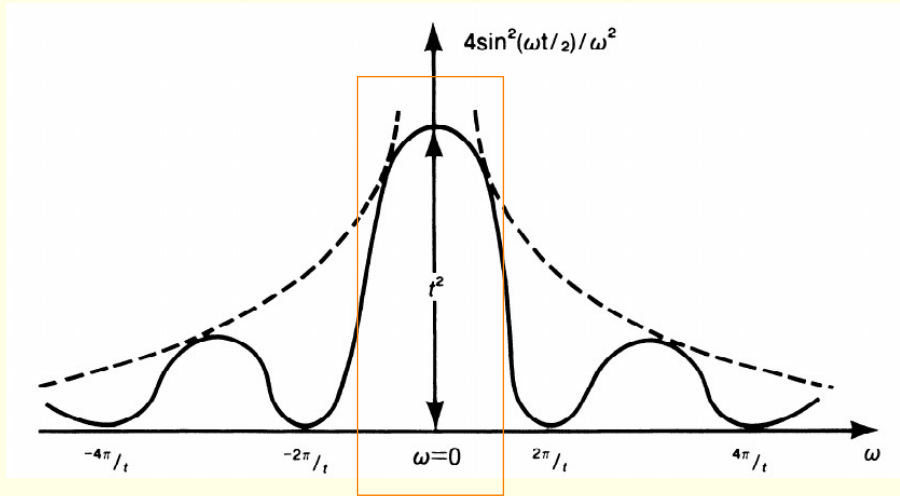
$$c_n^{(1)}(t) = \langle n | \left(\frac{-i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt' V_I(t') | i \rangle = \left(\frac{-i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_{ni}(t'-t_0)} V_{ni}(t')$$

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow n}(t) = |c_n^{(1)}(t) + c_n^{(2)}(t) + \dots|^2$$

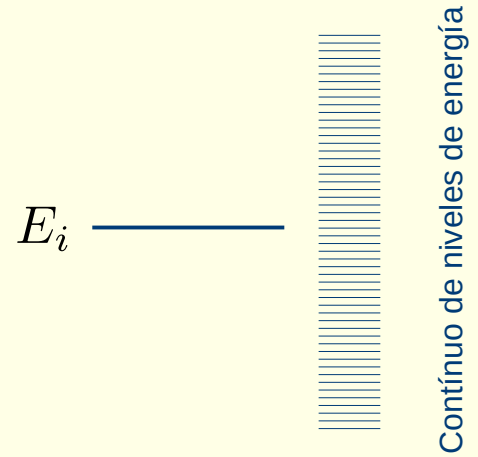
Perturbación constante

REPASO

$$|c_n^{(1)}|^2 = \frac{4|V_{ni}|^2}{|E_n - E_i|^2} \sin^2 \left[\frac{(E_n - E_i)t}{2\hbar} \right]$$



$$\omega \equiv \frac{E_n - E_i}{\hbar}$$



$$P_{trans} = \sum_{n, E_n \approx E_i} |c_n^{(1)}|^2 \Rightarrow \int dE_n \rho(E_n) |c_n^{(1)}|^2$$

Transition rate (tasa de transición):

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_n |c_n^{(1)}|^2 \right) = w_{i \rightarrow n} = \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) |V_{ni}|^2 \delta(E_n - E_i)$$

Perturbación armónica

$$V(t) = \mathcal{V} e^{i\omega t} + \mathcal{V}^\dagger e^{-i\omega t}$$

$$c_n^{(1)} = \frac{-i}{\hbar} \int_0^t (\mathcal{V}_{ni} e^{i\omega t'} + \mathcal{V}_{ni}^\dagger e^{-i\omega t'}) e^{i\omega_{ni} t'} dt'$$

$$= \frac{1}{\hbar} \left[\frac{1 - e^{i(\omega + \omega_{ni})t}}{\omega + \omega_{ni}} \mathcal{V}_{ni} + \frac{1 - e^{i(\omega_{ni} - \omega)t}}{-\omega + \omega_{ni}} \mathcal{V}_{ni}^\dagger \right]$$

$\omega_{ni} + \omega \approx 0$ or $E_n \approx E_i - \hbar\omega$ Emisión estimulada
 $\omega_{ni} - \omega \approx 0$ or $E_n \approx E_i + \hbar\omega$. Absorción

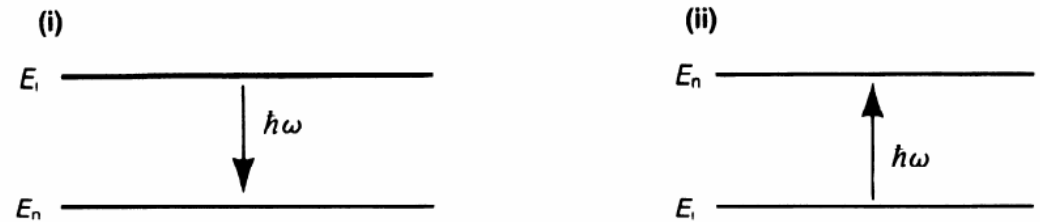


FIGURE 5.9. (i) Stimulated emission: Quantum-mechanical system gives up $\hbar\omega$ to V (possible only if initial state is excited). (ii) Absorption: Quantum mechanical system receives $\hbar\omega$ from V and ends up as an excited state.

Sistemas de varias partículas en mecánica cuántica

Vimos casos de espacios de Hilbert que son un **producto tensorial**, por ej.:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{r}} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y \otimes \mathcal{E}_z$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathbf{r}} \otimes \mathcal{E}_{\text{spin}}$$

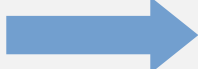
Para varias partículas también usamos el producto tensorial:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3 \otimes \dots$$

Pero veremos que hay diferencias entre partículas distinguibles e idénticas

Ejemplo: dos partículas (distinguibiles)

- Estados producto: $|1 : \varphi\rangle \otimes |2 : \chi\rangle$

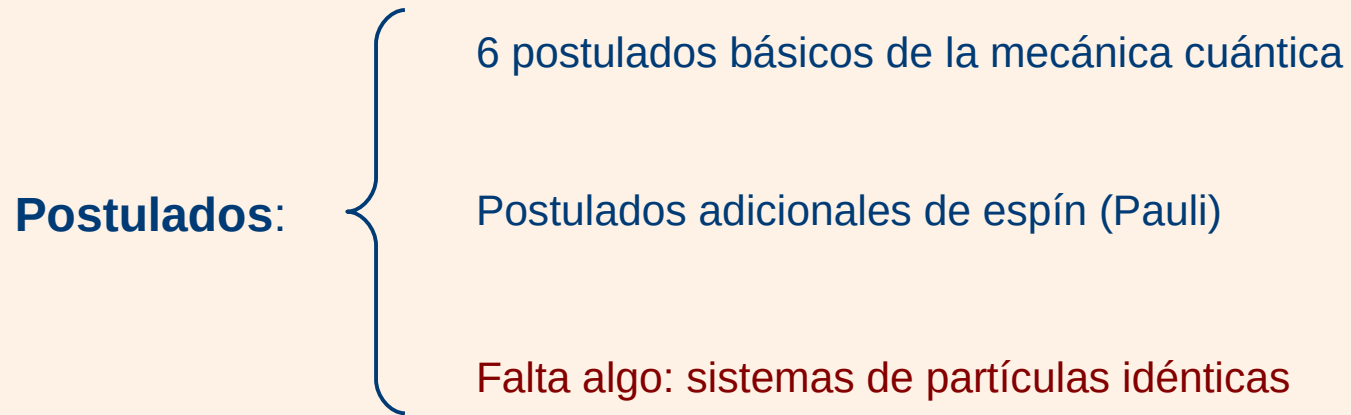
- Base de: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$  $|1 : u_i\rangle \otimes |2 : v_j\rangle$

Y un estado cualquiera: $|\psi(1, 2)\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |1 : u_i\rangle \otimes |2 : v_j\rangle$

- Operadores:

$$[A(1) \otimes B(2)]|1 : \varphi\rangle \otimes |2 : \chi\rangle = A(1)|1 : \varphi\rangle \otimes B(2)|2 : \chi\rangle$$

Definición del problema de partículas idénticas



Definición: Partículas idénticas

Son partículas que tienen las mismas propiedades intrínsecas:

Masa, carga, espín, etc. Ejemplos: electrones, protones, neutrones.

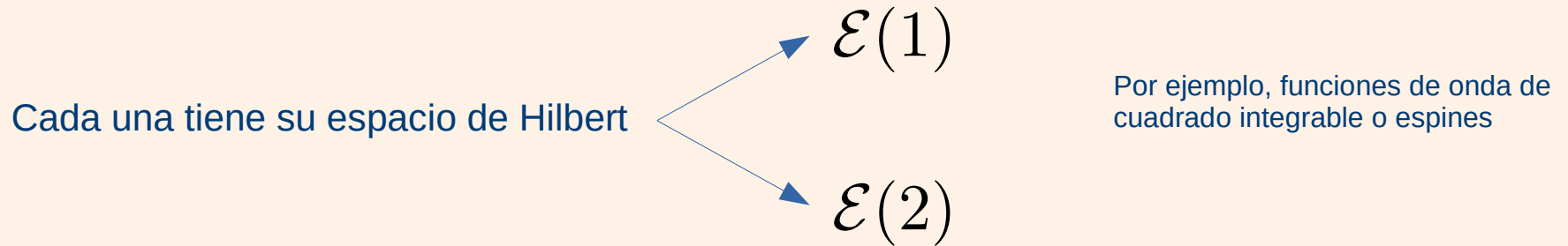
Electrón y positrón difieren (sólo) en la carga eléctrica, no son idénticos.

La “identidad” es mucho más profunda en mecánica cuántica que en mecánica clásica, porque en ésta las trayectorias bien definidas nos permiten etiquetar y rastrear a las partículas a todo tiempo. Aquí no importa si las partículas son idénticas o no, siempre son **distinguibles**. En mecánica cuántica se pierde el concepto de trayectoria y no podemos “seguir” a las partículas.

En mecánica cuántica, cuando tenemos sistemas con varias partículas del mismo tipo, o idénticas, no podemos distinguirlas en absoluto, y entonces debemos hacer un cambio en el formalismo del espacio de Hilbert.

Ejemplo cuántico con dos partículas

Supongamos un sistema con dos partículas idénticas.



En principio el espacio de Hilbert de las dos partículas sería: $\mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(2)$

Pero hay un problema, una ambigüedad en la definición del estado matemático asociado a un dado estado físico.

Degeneración de intercambio

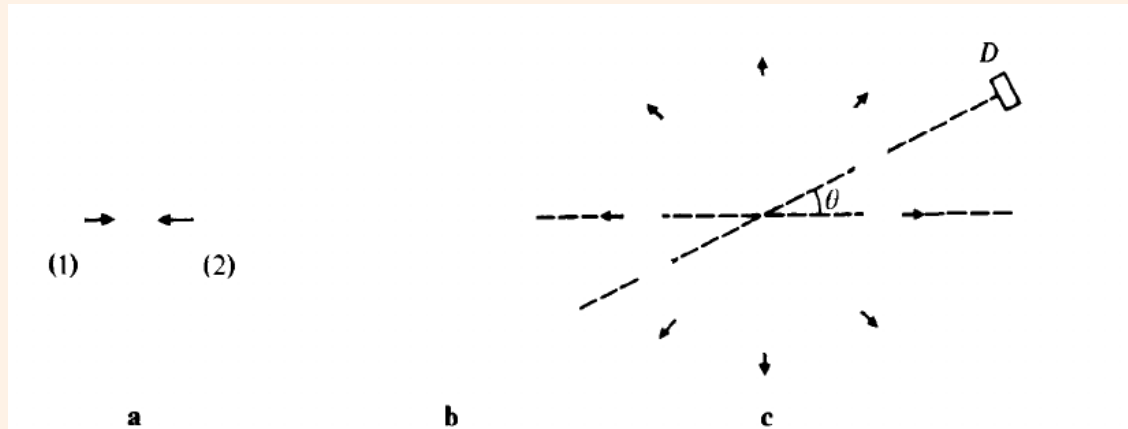
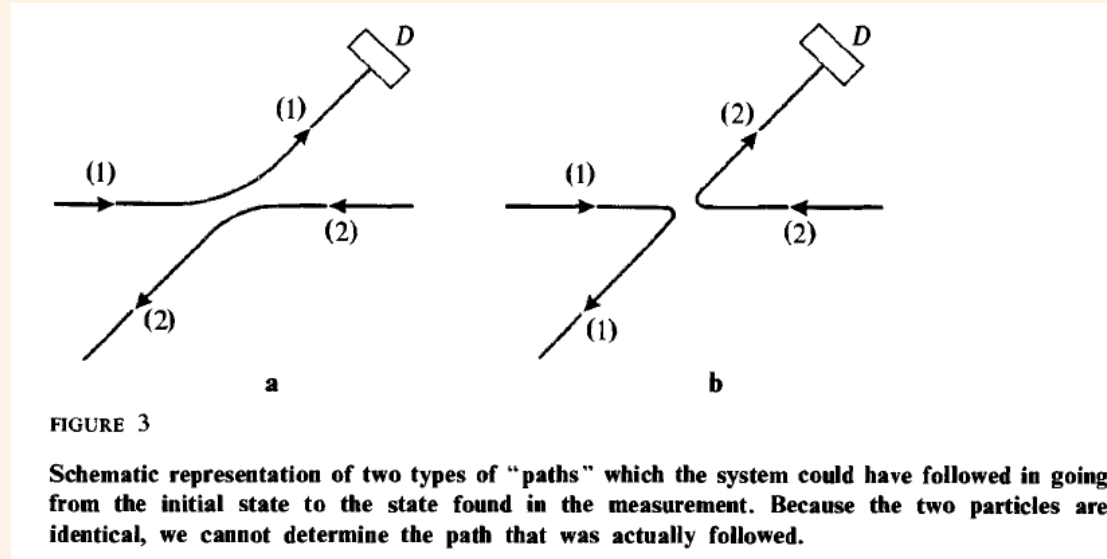


FIGURE 2

Collision between two identical particles in the center of mass frame : schematic representation of the probability density of the two particles.

Before the collision (fig. a), the two wave packets are clearly separated and can be labeled. During the collision (fig. b), the two wave packets overlap. After the collision (fig. c), the probability density is non-zero in a region shaped like a spherical shell whose radius increases over time. Because the two particles are identical, it is impossible, when a particle is detected at D , to know with which wave packet, (1) or (2), it was associated before the collision.

Degeneración de intercambio



¿Con cuál estado final debemos calcular la probabilidad de detectar las partículas?

Otra situación física:

Sean **dos partículas idénticas con espín $\frac{1}{2}$** (miramos sólo el espín)

Supongamos que **un espín está up y el otro down.**

Podríamos asociarle a ese **estado físico** los **estados matemáticos:**

$$\begin{aligned} &| \varepsilon_1 = +, \varepsilon_2 = - \rangle \\ &| \varepsilon_1 = -, \varepsilon_2 = + \rangle \end{aligned}$$

Análogamente, también se le podría asignar cualquier combinación lineal:

$$\alpha | +, - \rangle + \beta | -, + \rangle$$

Normalizada con: $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

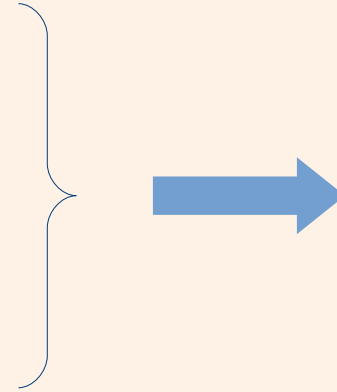
¿Cuál estado tomamos? \longrightarrow Degeneración de intercambio

Definición del problema de partículas idénticas

Como ejemplo de que esos estados no dan lo mismo, calculemos la probabilidad de medir la componente x de ambos espines y obtener up:

$$|\varepsilon_1 = +\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\varepsilon_1 = +\rangle + |\varepsilon_1 = -\rangle]$$

$$|\varepsilon_2 = +\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\varepsilon_2 = +\rangle + |\varepsilon_2 = -\rangle]$$



$$|+, +\rangle_x = |\varepsilon_1 = +\rangle_x \otimes |\varepsilon_2 = +\rangle_x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\varepsilon_1 = +\rangle + |\varepsilon_1 = -\rangle] \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} [|\varepsilon_2 = +\rangle + |\varepsilon_2 = -\rangle]$$

$$= \frac{1}{2} [|+, +\rangle + |-, +\rangle + |+, -\rangle + |-, -\rangle]$$

Definición del problema de partículas idénticas

$$\begin{aligned} & \left| \langle +_x, +_x | (\alpha |+, -\rangle + \beta |-, +\rangle) \right|^2 = \\ & = \left| \frac{1}{2} (\langle +, + | + \langle -, + | + \langle +, - | + \langle -, - |) (\alpha |+, -\rangle + \beta |-, +\rangle) \right|^2 \\ & = \left| \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \right|^2 \end{aligned}$$

Vemos que la probabilidad de medir la componente x de ambos espines y obtener up depende de la elección del estado matemático.

Postulado de simetrización con dos partículas idénticas

Sigamos con un sistema de 2 partículas idénticas (después generalizamos a N partículas)


$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$$

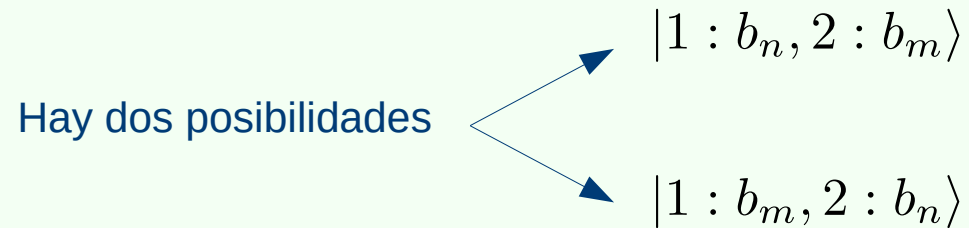
Sea $B(1)$ un observable en \mathcal{E}_1 . Supongamos que es un CCOC.
Como las partículas son idénticas existe un $B(2)$ análogo en \mathcal{E}_2 ,
y entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} B(1)|1 : b_i\rangle = b_i|1 : b_i\rangle \\ B(2)|2 : b_j\rangle = b_j|2 : b_j\rangle \end{array} \right.$$

Formamos base de \mathcal{E} : $\{|1 : b_i\rangle \otimes |2 : b_j\rangle = |1 : b_i, 2 : b_j\rangle\}$

Como las partículas son idénticas, no se puede medir $B(1)$ o $B(2)$: sólo podemos decir que se mide B para las partículas y se obtienen dos autovalores, digamos b_n y b_m .

¿Cuál sería el estado después de esta medición?



Una **medición completa** de observables en cada partícula no alcanzó para determinar el estado de forma unívoca: **degeneración de intercambio**

Operador Permutación

Sea base $\{|1 : u_i, 2 : u_j\rangle\}$

$$P_{21}|1 : u_i, 2 : u_j\rangle \equiv |2 : u_i, 1 : u_j\rangle$$

Propiedades:

$$(P_{21})^2 = 1 \implies P_{21}^{-1} = P_{21}$$

Es hermítico: $P_{21}^\dagger = P_{21}$ (demostrar)

Es unitario: $P_{21}^\dagger P_{21} = P_{21} P_{21}^\dagger = 1$



➔ autovalores de $P_{21} = \pm 1$

$$\left. \begin{aligned} P_{21}|\psi_S\rangle &= |\psi_S\rangle \\ P_{21}|\psi_A\rangle &= -|\psi_A\rangle \end{aligned} \right\} \text{Autovectores simétricos y antisimétricos} \\ \text{con respecto al intercambio de partículas}$$

Ejemplos:

$$|1 : u_i, 2 : u_i\rangle \quad \text{Es simétrico}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1 : u_i, 2 : u_j\rangle + |1 : u_j, 2 : u_i\rangle) \quad i \neq j \quad \text{es S}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1 : u_i, 2 : u_j\rangle - |1 : u_j, 2 : u_i\rangle) \quad i \neq j \quad \text{es A}$$

Simetrizador y antisimetrizador

$$S \equiv \frac{1}{2}(1 + P_{21})$$

$$A \equiv \frac{1}{2}(1 - P_{21})$$

Ejemplo:

$$S|1 : u_i, 2 : u_j\rangle = \frac{1}{2}(1 + P_{21})|1 : u_i, 2 : u_j\rangle = \frac{1}{2}(|1 : u_i, 2 : u_j\rangle + |2 : u_i, 1 : u_j\rangle)$$

$$A|1 : u_i, 2 : u_j\rangle = \frac{1}{2}(1 - P_{21})|1 : u_i, 2 : u_j\rangle = \frac{1}{2}(|1 : u_i, 2 : u_j\rangle - |2 : u_i, 1 : u_j\rangle)$$


Al aplicarlos a un ket general se obtiene un autoestado de P_{21} :

$$P_{21}S|\psi\rangle = \frac{1}{2}P_{21}(1 + P_{21})|\psi\rangle = \frac{1}{2}(P_{21} + 1)|\psi\rangle = S|\psi\rangle$$

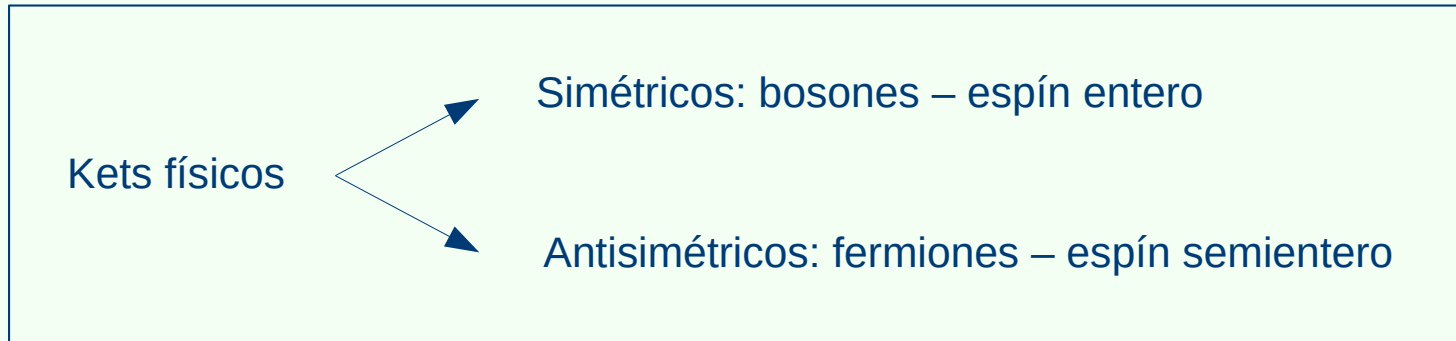
$$P_{21}A|\psi\rangle = \frac{1}{2}P_{21}(1 - P_{21})|\psi\rangle = \frac{1}{2}(P_{21} - 1)|\psi\rangle = -A|\psi\rangle$$

Permutación sobre observables

$$P_{21}\mathcal{O}(1, 2)P_{21}^\dagger = \mathcal{O}(2, 1)$$

Un operador es simétrico si : $\mathcal{O}(1, 2) = \mathcal{O}(2, 1)$  $[\mathcal{O}(1, 2), P_{21}] = 0$

Postulado de simetrización



Operadores de permutación de N partículas

Sea un **sistema de N partículas**, no necesariamente idénticas

Hay $N!$ **permutaciones** de las N partículas (incluyendo la identidad)

Veamos $N=3$

$$\{ | 1 : u_i ; 2 : u_j ; 3 : u_k \rangle \} \quad \text{Base}$$

$$P_{123}, P_{312}, P_{231}, P_{132}, P_{213}, P_{321} \quad \text{6 operadores de permutación}$$

$$P_{npq} | 1 : u_i ; 2 : u_j ; 3 : u_k \rangle = | n : u_i ; p : u_j ; q : u_k \rangle \quad \text{Definición del permutador}$$

$$\begin{aligned} P_{231} | 1 : u_i ; 2 : u_j ; 3 : u_k \rangle &= | 2 : u_i ; 3 : u_j ; 1 : u_k \rangle \\ &= | 1 : u_k ; 2 : u_i ; 3 : u_j \rangle \end{aligned}$$

Ejemplos

$$P_{123} = 1$$

Propiedades de los operadores de permutación

(1) El conjunto de operadores de permutación forma un grupo

Veamoslo en el ejemplo de $N=3$

(i) P_{123} es la identidad

(ii) El producto de dos permutaciones es también una permutación

Ejemplo: $P_{312}P_{132} = P_{321}$

$$\begin{aligned} P_{312}P_{132} | 1 : u_i ; 2 : u_j ; 3 : u_k \rangle &= P_{312} | 1 : u_i ; 3 : u_j ; 2 : u_k \rangle \\ &= P_{312} | 1 : u_i ; 2 : u_k ; 3 : u_j \rangle \\ &= | 3 : u_i ; 1 : u_k ; 2 : u_j \rangle \\ &= | 1 : u_k ; 2 : u_j ; 3 : u_i \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{312}P_{132} | 1 : u_i ; 2 : u_j ; 3 : u_k \rangle &= P_{312} | 1 : u_i ; 3 : u_j ; 2 : u_k \rangle \\
 &= P_{312} | 1 : u_i ; 2 : u_k ; 3 : u_j \rangle \\
 &= | 3 : u_i ; 1 : u_k ; 2 : u_j \rangle \\
 &= | 1 : u_k ; 2 : u_j ; 3 : u_i \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{321} | 1 : u_i ; 2 : u_j ; 3 : u_k \rangle &= | 3 : u_i ; 2 : u_j ; 1 : u_k \rangle \\
 &= | 1 : u_k ; 2 : u_j ; 3 : u_i \rangle
 \end{aligned}$$

(iii) Cada permutación tiene inversa

$$\begin{aligned}
 P_{123}^{-1} &= P_{123} ; & P_{312}^{-1} &= P_{231} ; & P_{231}^{-1} &= P_{312} \\
 P_{132}^{-1} &= P_{132} ; & P_{213}^{-1} &= P_{213} ; & P_{321}^{-1} &= P_{321}
 \end{aligned}$$

Notar que es un grupo no conmutativo:

$$P_{132}P_{312} = P_{213}$$

$$P_{312}P_{132} = P_{321}$$

(2) Transposiciones. Paridad de un operador de permutación

Transposición: permutación que intercambia sólo un par de partículas

Ejemplo:

$$P_{123}, P_{312}, P_{231}, P_{132}, P_{213}, P_{321}$$

Las transposiciones son hermíticas y unitarias.

Propiedad importante: toda permutación se puede escribir como producto de transposiciones.

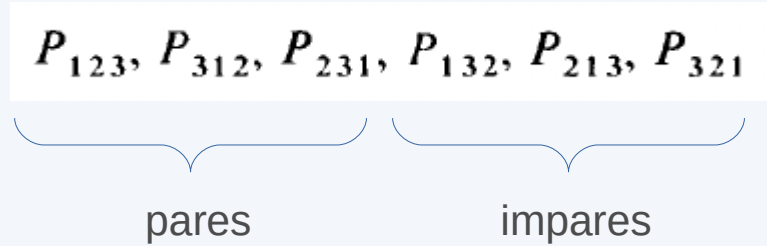
$$P_{312} = P_{132}P_{213} = P_{321}P_{132} = P_{213}P_{321} = P_{132}P_{213}(P_{132})^2 = \dots$$

Esta descomposición no es única, pero la cantidad de transposiciones siempre tiene la misma paridad. Esta es la **paridad de la permutación**.

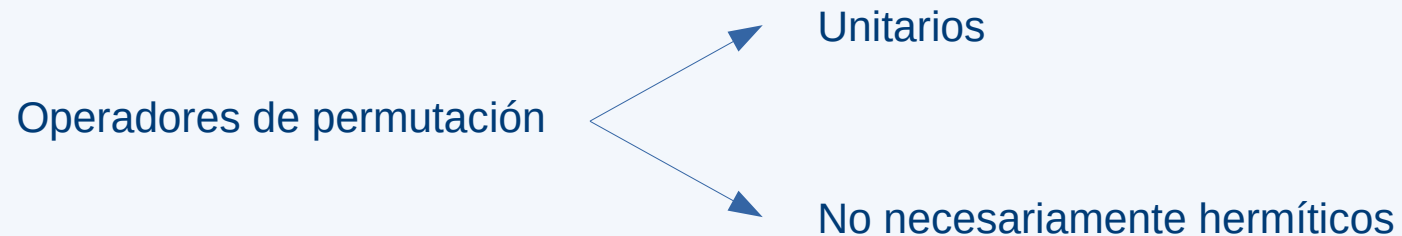
(2) Transposiciones. Paridad de un operador de permutación

Paridad de la permutación

Ejemplo:



Siempre hay igual cantidad de permutaciones pares que impares



Resumen de la Clase 24

En esta clase vimos:

- Sistemas cuánticos de varias partículas
- Definición del problema de partículas idénticas
- Postulado de simetrización con dos partículas
- Operadores de permutación de N partículas