18/8/2015

Valor medio de un observable en un estado $|\psi\rangle$

Sup. que preparamos estado $|\psi\rangle$ N veces y medimos obs. A . ~~[illegible] grande~~ Medimos a_n $\mathcal{N}(a_n)$ veces.

$$\frac{\mathcal{N}(a_n)}{N} \xrightarrow{N \to \infty} \mathcal{P}(a_n) \qquad : \text{cuarto postulado}$$

con $\sum_n \mathcal{N}(a_n) = N$

Valor medio de las N mediciones:

$$\frac{1}{N} \sum_n a_n \mathcal{N}(a_n) \xrightarrow{N \to \infty} \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n) = \langle A \rangle_\psi$$

Según el cuarto postulado:

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2$$

$$\Rightarrow \langle A \rangle_\psi = \sum_n a_n \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2$$

$$= \sum_n a_n \sum_i \langle \psi | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \psi \rangle$$

$$= \sum_n \sum_i \langle \psi | a_n | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \psi \rangle$$

$$= \sum_n \sum_i \langle \psi | A | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | A \sum_{n,i} | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \, | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | A | \psi \rangle$$

Válido También para espectro contínuo (demostrar)

Ejemplos usando la base o representación $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$\langle X\rangle_\psi = \langle\psi|X|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\left(\int d^3r\, |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\right) X |\psi\rangle$$

$$= \int d^3r\, \langle\psi|\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|X|\psi\rangle$$

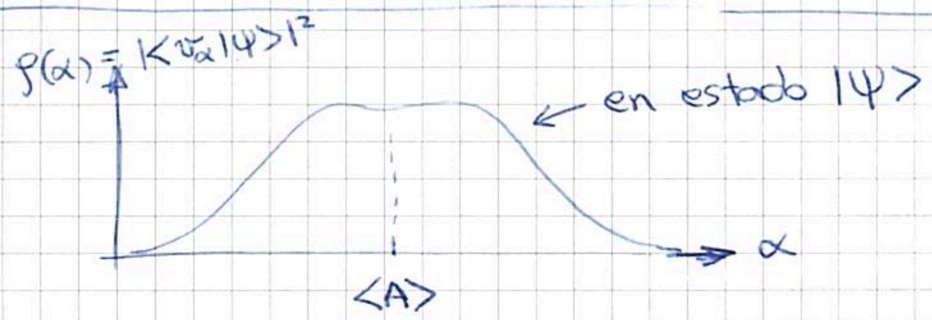
$$= \int d^3r\, \psi^*(\vec{r})\, x\, \psi(\vec{r})$$

$$\langle P_x\rangle_\psi = \langle\psi|P_x|\psi\rangle$$

$$= \int d^3r\, \langle\psi|\vec{r}\rangle\, \langle\vec{r}|P_x|\psi\rangle$$

$$= \int d^3r\, \psi^*(\vec{r})\, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\, \psi(\vec{r})$$

Desviación cuadrática media de A en $|\psi\rangle$



$$A|v_\alpha\rangle = \alpha|v_\alpha\rangle$$

Ancho de la distribución de probabilidad:

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle\psi|\, (A - \langle A\rangle)^2 |\psi\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$$

Ejemplo importante:

Ver C_{III}

$$\Delta X\, \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

y también para Y, Z

Relaciones de incerteza de Heisenberg.

29/08/16

Relaciones de incerteza de Heisenberg

Sean A y B op. hermíticos, con conmutador:

$$[A, B] = iC$$

Vemos que C también es hermítico:

$$C = -i[A,B] \Rightarrow C^+ = i[A,B]^+ = i\,(AB - BA)^+$$
$$= i\,(B^+A^+ - A^+B^+)$$
$$= i\,(BA - AB)$$
$$= -i\,[A,B] = C \quad \checkmark$$

Sea $|\psi\rangle$ un estado cualquiera:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 = \langle\psi|\underbrace{(A - \langle A\rangle)}_{\equiv \tilde{A}}{}^2|\psi\rangle \; \langle\psi|\underbrace{(B - \langle B\rangle)}_{\equiv \tilde{B}}{}^2|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\tilde{A}^2|\psi\rangle\langle\psi|\tilde{B}^2|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\tilde{A}^+\tilde{A}|\psi\rangle\langle\psi|\tilde{B}^+\tilde{B}|\psi\rangle$$

$$= \langle\tilde{A}\psi|\tilde{A}\psi\rangle\langle\tilde{B}\psi|\tilde{B}\psi\rangle = (*)$$

Usamos desigualdad de Schwartz:

$$|V_1|^2\,|V_2|^2 \geqslant |\langle V_1|V_2\rangle|^2$$

$$(*) \geqslant |\langle\tilde{A}\psi|\tilde{B}\psi\rangle|^2 = |\langle\psi|\tilde{A}^+\tilde{B}|\psi\rangle|^2$$

$$= |\langle\psi|\tilde{A}\tilde{B}|\psi\rangle|^2$$

Solo nos falta hacer aparecer $[A,B] = [\tilde{A}, \tilde{B}]$

Notar:

$$AB = \frac{AB + BA}{2} + \frac{AB - BA}{2} = \frac{1}{2}\underbrace{\{A, B\}}_{\text{anticonmutador (es hermítico)}} + \frac{1}{2}[A, B]$$

Entonces:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left| \langle \psi | \frac{1}{2}\{\tilde{A}, \tilde{B}\} + \frac{1}{2}[\tilde{A}, \tilde{B}] | \psi \rangle \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} \left| \underbrace{\langle \psi | \{\tilde{A}, \tilde{B}\} | \psi \rangle}_{\alpha \in \mathbb{R}} + \underbrace{\langle \psi | i C | \psi \rangle}_{i\beta,\ \beta \in \mathbb{R}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} |\alpha + i\beta|^2$$

El valor de expectación de un op. hermítico es real

$$= \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= \frac{1}{4} \langle \psi | \{\tilde{A}, \tilde{B}\} | \psi \rangle^2 + \frac{1}{4} \langle \psi | C | \psi \rangle^2$$

Consideremos operadores canónicamente conjugados:

$[A, B] = i\hbar$, o sea $C = \hbar$

$$\Rightarrow (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \underbrace{\frac{1}{4} \langle \psi | \{\tilde{A}, \tilde{B}\} | \psi \rangle^2}_{\geq 0} + \frac{\hbar^2}{4} \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta A \, \Delta B \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Ejemplo: $A = x$, $B = P_x$

$\Delta x \, \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}$ Relación de incerteza de Heisenberg.

Válido en general para dos obervables conjugados que satisfacen : $[A, B] = i\hbar$

Para dos observables cualquiera:

$$\Delta A \, \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$$

Observables que conmutan

Teorema (Ver II.D.3)

Si $[A, B] = 0$, y si
$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle \Rightarrow A \underbrace{B|\psi\rangle} = a \underbrace{B|\psi\rangle}$

a) Si a es no-degenerado $\Rightarrow |\psi\rangle$ es autoestado de B.
Proof: $|\psi\rangle$ y $B|\psi\rangle$ autoest. de A con mismo autoval
$\rightarrow |\psi\rangle \propto B|\psi\rangle \Rightarrow B|\psi\rangle = b|\psi\rangle$

b) Si a es degenerado $\Rightarrow B|\psi\rangle \in \mathcal{E}_a$

En otras palabras: $\mathcal{E}_a$ es invariante frente a B

Teorema

$[A, B] = 0 \qquad A|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle$
$\qquad\qquad\qquad A|\psi_2\rangle = a_2|\psi_2\rangle \qquad a_1 \neq a_2$

$\Rightarrow \langle \psi_1 | B | \psi_2 \rangle = 0$

Teorema

Si $[A, B] = 0$ se puede hallar una base de $\mathcal{E}$ de autoestados comunes de A y B.

Notación: $\{|u^i_{n,p}\rangle\}$

$$A|u^i_{n,p}\rangle = a_n |u^i_{n,p}\rangle$$

$$B|u^i_{n,p}\rangle = b_p |u^i_{n,p}\rangle$$

Conjunto completo de observables que conmutan (CCOC)

Sea A con $A|u_n\rangle = a_n |u_n\rangle$, a_n no degenerado

Los autosubespacios de A, $\mathcal{E}_n$, son unidimensionales.

$\{u_n\}$ es la única base de autoestados de A.

Decimos que A es un CCOC (con un solo elemento).

Si, p.ej, a_n es deg. $\Rightarrow \dim(\mathcal{E}_n) > 1$

hay libertad para elegir los $\{|u^i_n\rangle\}$ $\quad i = 1 \dots g_n$

Tomemos un B / $[A,B] = 0$

Vimos que $B|u^i_n\rangle \in \mathcal{E}_n$, pero no necesariamente

$|u^i_n\rangle$ es autovector de B.

Podemos construir una base común de A y B en todos los $\mathcal{E}_n$. Si esta base es única $\{A, B\}$ es un CCOC.

Un conjunto de observables $A, B, C, \dots$ es un CCOC si

i) $A, B, C, \dots$ conmutan entre sí

ii) Los autovalores de ellos determinan un único autoestado.

Compatibilidad de observables

Sean A, B, $[A, B] = 0$

$\Rightarrow$ existe una base de autoestados comunes $\{|a_n, b_p, i\rangle\}$

$$A|a_n b_p i\rangle = a_n |a_n b_p i\rangle$$
$$B|a_n b_p i\rangle = b_p |a_n b_p i\rangle$$

Quiere decir que preparando el sistema en alguno de los estados $|a_n b_p i\rangle$ $(i = 1, \ldots, g_{np})$ es posible medir A y B y obtener con certeza a_n y b_p.
En otras palabras, podemos preparar el estado del sistema de modo que tenga bien definidos A y B.
$\rightarrow$ A y B son observables compatibles.

Measurement of A and B

Sea estado $|\psi\rangle$. Podemos escribir:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,p,i} |a_n b_p i\rangle\langle a_n b_p i|\psi\rangle$$
$$= \sum_{npi} c_{npi} |a_n b_p i\rangle$$

Medir A e inmediatamente B $\}$ $P(a_n, b_p) = P(b_p|a_n)P(a_n)$

B " " A $\}$ $P(b_p, a_n) = P(a_n|b_p)P(b_p)$

El resultado es el mismo:

$$P(a_n, b_p) = P(b_p, a_n) = \sum_i |c_{npi}|^2 \quad \text{probab.}$$

$$|\psi_{final}\rangle = \sum_i c_{npi} |a_n b_p i\rangle \Big/ \sqrt{\sum_i |c_{npi}|^2}$$

$\Rightarrow$ Podemos hablar de una medición simultánea de A y B (porque son compatibles = conmutan).

$\rightarrow$ extensión o generalización de 4to y 5to postulados.

Cuidado! si $[A, B] \neq 0$

el orden de la medición importa: influye sobre las probabilidades y sobre el estado final.

Preparación de un estado

Si mido un CCOC y obtengo los autovalores

$a_n, b_p, c_r, \ldots$

entonces sé con certeza que el estado después de la medición es el ket

$$|a_n\, b_p\, c_r \ldots\rangle$$

Esto es análogo al uso de polarizadores en óptica.