18/ /2015 - 1

Suma de dos espines $\frac{1}{2}$ (Sección X.B)

Sean dos partículas de espín $\frac{1}{2} \longrightarrow \vec{S}_1, \vec{S}_2$

Espacios de estados individuales generados por:

$$\mathcal{H}_1 : \{ \overset{m_1=+\hbar/2}{|1:+\rangle}, \overset{m_1=-\hbar/2}{|1:-\rangle} \} \qquad \{ \overset{m_2=\hbar/2}{|2:+\rangle}, \overset{m_2=-\hbar/2}{|2:-\rangle} \} : \mathcal{H}_2 \qquad j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$$

Espacio Total es el producto tensorial:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

Generado por los estados producto:

$$\{ |1:+, 2:+\rangle, |1:+, 2:-\rangle, |1:-, 2:+\rangle, |1:-, 2:-\rangle \}$$

$$\{ |1:+\rangle \otimes |2:+\rangle, |1:+\rangle \otimes |2:-\rangle, |1:-\rangle \otimes |2:+\rangle, |1:-\rangle \otimes |2:-\rangle \}$$

$$\{ |+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle \} = \{ |m_1, m_2\rangle \} = \{ |\epsilon_1 \epsilon_2\rangle \}$$

En el espacio producto, los operadores se "extienden"

$$S_1^2 \longrightarrow S_1^2 \times \mathbb{1}_2 \quad , \quad S_2^2 \longrightarrow \mathbb{1}_1 \otimes S_2^2$$

pero normalmente no escribimos la identidad del otro espacio.

$$S_1^2 |m_1 m_2\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |m_1 m_2\rangle \Rightarrow S_1^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \mathbb{1}_1 \times \mathbb{1}_2 = S_2^2$$

$$S_{1z} |m_1 m_2\rangle = m_1 \frac{\hbar}{2} |m_1 m_2\rangle \longrightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y análogamente para S_2^2 y S_{2z}:

$$S_{2z} |m_1 m_2\rangle = m_2 \frac{\hbar}{2} |m_1 m_2\rangle \longrightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Espín total

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

- $\vec{S}$ es un momento angular, satisface $[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} S_k$

$$[S_x, S_y] = [S_{1x} + S_{2x}, S_{1y} + S_{2y}]$$

$$= [S_{1x}, S_{1y}] + \cancel{[S_{1x}, S_{2y}]} + \cancel{[S_{2x}, S_{1y}]} + [S_{2x}, S_{2y}]$$

conmutan

$$= i\hbar S_{1z} + i\hbar S_{2z} = i\hbar S_z \quad ✓$$

- Queremos pasar de $\{S_1^2, S_2^2, S_{1z}, S_{2z}\}$

a $\{S_1^2, S_2^2, \boxed{S^2, S_z}\}$

En realidad alcanza con tomar como C.C.O.C.

a $\{S_{1z}, S_{2z}\}$ o $\{S^2, S_z\}$

y buscamos autoestados $|S, M\rangle$ /

$$S^2 |S, M\rangle = S(S+1)\hbar^2 |S, M\rangle$$
$$S_z |S, M\rangle = M\hbar |S, M\rangle$$

Queremos expresar $|S, M\rangle$ en función de $\{|m_1, m_2\rangle\}$

Diagonalización de S_z

$$S_z |m_1 m_2\rangle = (S_{1z} + S_{2z}) |m_1 m_2\rangle$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)}_{M} \hbar \, |m_1 m_2\rangle \qquad \checkmark \text{ ya es autoestado}$$

$$S_z |++\rangle = \hbar \, |++\rangle$$
$$S_z |+-\rangle = 0$$
$$S_z |-+\rangle = 0$$
$$S_z |--\rangle = -\hbar \, |--\rangle$$

$\left.\begin{matrix} S_z |+-\rangle = 0 \\ S_z |-+\rangle = 0 \end{matrix}\right\}$ subespacio degenerado con autovalor $M = 0$

$$M \begin{cases} \nearrow 1 \\ \rightarrow 0 \\ \searrow -1 \end{cases}$$

$$(S_z) = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en la base } \{|m_1 m_2\rangle\}$$

Diagonalización de S^2

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$$
$$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$$

$$S^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$$

$$= \vec{S}_1^2 + S_2^2 + 2\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \qquad \left(\text{recordar } [S_{1i}, S_{2j}] = 0\right)$$

$$= S_1^2 + S_2^2 + 2(S_{1x} S_{2x} + S_{1y} S_{2y} + S_{1z} S_{2z})$$

$$= S_1^2 + S_2^2 + S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+} + 2 S_{1z} S_{2z}$$

y sabemos como actúan $S_\pm$ para cada espín:

$$\begin{cases} S_+ |+\rangle = 0 \\ S_+ |-\rangle = \hbar |+\rangle \end{cases} \qquad \begin{cases} S_- |+\rangle = \hbar |-\rangle \\ S_- |-\rangle = 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$S^2 |-+\rangle = \left(S_1^2 + S_2^2 + 2 S_{1z} S_{2z} + S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+} \right) |-+\rangle$$

$$= \left(\frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{1}{2}\hbar^2 \right) |-+\rangle + \hbar^2 |+-\rangle$$

$$= \hbar^2 \left(|-+\rangle + |+-\rangle \right)$$

Podemos calcular la matriz de S^2 en base $\{ |m_1 m_2\rangle \}$

$$(S^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \hbar^2$$

Dos kets ya son autoestados:

$$S^2 |++\rangle = 2\hbar^2 |++\rangle \qquad (M = 1)$$

$$S^2 |--\rangle = 2\hbar^2 |--\rangle \qquad (M = -1)$$

Pero $\{ |+-\rangle, |-+\rangle \}$ no son autoestados,

pero son autoestados de S_z con $M = 0$.

Falta diagonalizar ~~en~~ el subespacio $M = 0$

$$(S^2)_{M=0} = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 2$$

Autovectores:

$$2\hbar^2 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)$$

$$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$

Resumen: triplete y singlete

[redacted]

$$S \begin{cases} 0 \rightarrow M = 1 \\ 1 \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$

singlete
singulete
(antisimétrico)

$$\begin{cases} |1\,1\rangle = |++\rangle \\ |1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right) \\ |1\,-1\rangle = |--\rangle \end{cases}$$

Triplete
$\{|1\,M\rangle\}$
(Simétricos)

Suma de dos espines $\frac{1}{2}$

22/9/2015 - 1

Suma de MA $\longleftrightarrow$ cambio de base:

$$\{S_{1z}, S_{2z}\} \rightarrow \{S^2, S_z\}$$

$$|SM\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle m_1 m_2 | SM\rangle \, |m_1 m_2\rangle$$

Simbólicamente: $\underbrace{\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}}_{\text{producto tensorial}} = \underbrace{1 \oplus 0}_{\text{suma directa}}$

$$\dim\left(\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}\right) = (2S_1+1)(2S_2+1) = \left(2 \times \frac{1}{2}+1\right)\left(2 \times \frac{1}{2}+1\right) = 4$$

$$\dim(1 \oplus 0) = \sum_{S=0}^{1} (2S+1) = 1 + 3 = 4$$

Espacios con espín total bien definido

Ejemplos

(1) $H = -(\gamma_1 \vec{S}_1 + \gamma_2 \vec{S}_2) \cdot \vec{B}$ Campo magnético externo

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} \Rightarrow H = -(\gamma_1 S_{1z} + \gamma_2 S_{2z}) B_0$$

Conviene la base $\{|m_1 m_2\rangle\}$ de estados producto porque diagonaliza H.

(2) Interacción hiperfina (entre protón y electrón)

$$H = A \, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} A \left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right)$$

La base $\{|S, M\rangle\}$ de espín total diagonaliza H.

Organizamos los autoestados de S^2 y S_z :

$M \backslash S$	1	0
1	$\|1\ 1\rangle$	
0	$\|1\ 0\rangle$	$\|0\ 0\rangle$
-1	$\|1\ -1\rangle$	

~~Son todos autoestados de S_{1z} y S_{2z}, entonces es fácil relacionar M con los valores de m_1 y m_2 compatibles~~

Es siempre $M = m_1 + m_2$.

$$|1\,1\rangle = |+\,+\rangle$$

Obtenemos $|1\,0\rangle$ aplicando S_- :

$$S_-|1\,1\rangle = \sqrt{2}\hbar\,|1\,0\rangle \Rightarrow |1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} S_-|1\,1\rangle$$

$$\cancel{= (S_{1-} + S_{2-})|++\rangle =}$$

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left(S_{1-} + S_{2-}\right)|++\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left(\hbar\,|-+\rangle + \hbar\,|+-\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-+\rangle + |+-\rangle\right).$$

y aplicando S_- de nuevo obtenemos $|1\,-1\rangle$

El primer estado de la segunda columna, $|0\,0\rangle$, tiene $S=0 \Rightarrow M=0$.

como $M = m_1 + m_2$, estado deber ser comb. lineal de $|+-\rangle$ y $|-+\rangle$, y debe ser $\perp$ al otro estado con $M=0$.

$$\Rightarrow |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$

<u>Caso general</u>: $\vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}$

Estados producto: $|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$

Son autoestados de $J_z = J_{1z} + J_{2z}$:

$$J_z |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle = \hbar \underbrace{(m_1 + m_2)}_{m} |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$$

En general hay varias combinaciones de m_1 y m_2 que dan $m = m_1 + m_2$, excepto para $m = j_1 + j_2$ y $m = -(j_1 + j_2)$.

Hay degeneración como en el caso $M=0$ que vimos en la suma de espines $\frac{1}{2}$.

Podríamos escribir J^2 y diagonalizar, pero no es práctico.

~~[illegible]~~ Valores permitidos de j

Buscamos estados $|j_1 j_2 j m\rangle$ /

$$J^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$J_z |j_1 j_2 j m\rangle = m\hbar |j_1 j_2 j m\rangle$$

Sup. $j_1 \geq j_2$. Los posibles valores de j son:

$$j = j_1 + j_2,\ j_1 + j_2 - 1,\ \dots,\ j_1 - j_2 + 1,\ j_1 - j_2$$

$$\left(\text{para } j_1 = j_2 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow j = 1, 0\right)$$

se pueden ver que:

$$\boxed{\dim\left(\mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2}\right) = (2j_1+1)(2j_2+1) = \dim\left(\sum_{\oplus} \mathcal{E}_j\right)}$$

$$\stackrel{?}{=} \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) = \sum_{j=0}^{j_1+j_2} (2j+1) - \sum_{j=0}^{j_1-j_2-1} (2j+1)$$

SUPONIENDO $j_1 \geq j_2$ sin pérdida de generalidad

usar $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=0}^{n} 1 = n$

$$= \frac{(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)}{2} - \frac{(j_1-j_2-1)(j_1-j_2)}{2} =$$

$$= \left(j_1^2 + j_1 j_2 + j_2 j_1 + j_2^2 + j_1 + j_2 - \left[j_1^2 - j_1 j_2 - j_2 j_1 - j_1 + j_2\right]\right)\frac{1}{2}$$

$$\cancel{= (4 j_1 j_2 + 2 j_1)\tfrac{1}{2} = j_1(2j_2+1)}$$

$$= (2j_1+1)(2j_2+1) \checkmark$$

$$\Rightarrow j_1 \otimes j_2 = (j_1+j_2) \oplus (j_1+j_2-1) \oplus \dots \oplus (j_1-j_2)$$

$$\Rightarrow |j_1 j_2 j m\rangle \text{ con } j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$-j \leq m \leq j$$

$m \backslash j$	j_1+j_2	j_1+j_2-1	$\cdots$	j_1-j_2
j_1+j_2	$\|j_1+j_2, j_1+j_2\rangle$ 1			
j_1+j_2-1	$\|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$	$\|j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle$		
j_1+j_2-2	$\|j_1+j_2, j_1+j_2-2\rangle$	$\|j_1+j_2-1, j_1+j_2-2\rangle$		$\|j_1-j_2, j_1-j_2\rangle$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$-j_1-j_2+2$	$\|j_1+j_2, -(j_1+j_2)+2\rangle$	$\|j_1+j_2-1, -(j_1+j_2-1)+1\rangle$		$\|j_1-j_2, -(j_1-j_2)\rangle$
$-j_1-j_2+1$	$\|j_1+j_2, -(j_1+j_2)+1\rangle$	$\|j_1+j_2-1, -(j_1+j_2-1)\rangle$		
$-j_1-j_2$	$\|j_1+j_2, -(j_1+j_2)\rangle$			

Empezamos con 1

$$|j=j_1+j_2, m=j_1+j_2\rangle = |j_1, m_1=j_1; j_2, m_2=j_2\rangle \quad \left(|j_1 j_2, m_1=j_1, m_2=j_2\rangle\right)$$

Bajamos en columna de $j=j_1+j_2$ aplicando J_-:

$$J_-|\overset{j=}{j_1+j_2}, \overset{m=}{j_1+j_2}\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(j_1+j_2)(j_1+j_2+1) - (j_1+j_2)(j_1+j_2-1)}\,|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{2(j_1+j_2)}\,|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$$

y por otro lado:

$$|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(j_1+j_2)}\,\hbar}\left(J_{1-}+J_{2-}\right)|j_1 j_1, j_2 j_2\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(j_1+j_2)}\,\hbar}\Big(\hbar\sqrt{j_1(j_1+1)-j_1(j_1-1)}\;|j_1, j_1-1; j_2 j_2\rangle$$
$$+\hbar\sqrt{j_2(j_2+1)-j_2(j_2-1)}\;|j_1 j_1; j_2, j_2-1\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cancel{2}(j_1+j_2)}}\left(\sqrt{\cancel{2}j_1}\;|j_1, j_1-1; j_2 j_2\rangle + \sqrt{\cancel{2}j_2}\;|j_1 j_1; j_2 j_2-1\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{j_1}{j_1+j_2}\right)^{1/2}|j_1 j_1-1; j_2 j_2\rangle + \left(\frac{j_2}{j_1+j_2}\right)^{1/2}|j_1 j_1; j_2, j_2-1\rangle$$

Y análogamente continuamos bajando por la columna de $j=j_1+j_2$ (basta con bajar hasta $m=0$).

<u>Siguiente columna</u>: $j=j_1+j_2-1$

Estado de arriba: $m=j=j_1+j_2-1$

$$\rightarrow \quad |j=j_1+j_2-1, m=j_1+j_2-1\rangle$$

¿Qué estados producto necesitamos? Los que tengan $m_1+m_2=j_1+j_2-1$

$$|j_1, m_1=j_1; j_2, m_2=j_2-1\rangle,\quad |j_1, m_1=j_1-1; j_2, m_2=j_2\rangle$$

Como debe ser ortogonal a $|j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2 - 1\rangle$

obtenemos:

$$|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = \left(\frac{j_1}{j_1 + j_2}\right)^{1/2} |j_1, j_1; j_2\, j_2 - 1\rangle$$

$$- \left(\frac{j_2}{j_1 + j_2}\right)^{1/2} |j_1, j_1 - 1; j_2\, j_2\rangle$$

Siguiente columna: $j = j_1 + j_2 - 2$

Estado de arriba:

$$|j = j_1 + j_2 - 2, m = j_1 + j_2 - 2\rangle$$

Puede contener 3 estados producto:

$$|m_1 = j_1, m_2 = j_2 - 2\rangle = |j_1\, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 2\rangle$$
$$|m_1 = j_1 - 1, m_2 = j_2 - 1\rangle = |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle$$
$$|m_1 = j_1 - 2, m_2 = j_2\rangle = |j_1, j_1 - 2\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle$$

Tiene que ser ortogonal a los estados hallados antes con el mismo m.
Normalización.
Así se obtiene el $|j, j\rangle$ y después se baja con J_-.

Coeficientes Clebsh - Gordan

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle$$

1) No nulos sólo si $j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2$

2) No nulos sólo si $m = m_1 + m_2$

3) Reales (por convención)

4) $\langle j_1 j_1 ; j_2 , m_2 = j - j_1 | j j\rangle > 0$ (convención de signos)

5) $\langle j_1 m_1 , j_2 m_2 | j m\rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - j} \langle j_1 , -m_1 , j_2 , -m_2 | j , -m\rangle$

Nos ahorra el trabajo de computar para $m < 0$