Espacios de Hilbert de dimensión finita

1 **Notación de Dirac.** Sea T_v el funcional asociado al vector $|v\rangle$ por el lema de Riesz. Probar que

(a) $T_{|v\rangle+|w\rangle} = \langle v| + \langle w|$.

(b) $T_{\alpha|v\rangle} = \alpha^* \langle v|$.

2 **Operador de proyección.** Dado un vector, de norma unitaria, $|v\rangle$ de un espacio de Hilbert de dimensión D, definimos el operador $P_v = |v\rangle \langle v|$.

(a) Mostrar que P_v es un *proyector*, es decir que satisface: (i) $P_v^2 = P_v$, (ii) $P_v^\dagger = P_v$.

(b) Sea $\{|1\rangle, \cdots, |D\rangle\}$ una base ortonormal. Escribir la representación matricial de P_v en esta base.

(c) Repita el ítem anterior para el caso particular en que $|v\rangle$ coincide con un elemento de la base, por ejemplo $|v\rangle = |1\rangle$. Deduzca que los autovalores de un proyector ortogonal son todos ceros salvo en el caso del vector sobre el cual proyecta, cuyo autovalor es uno.

(d) Considere ahora un operador hermítico A; $\{a_i\}$ sus autovalores y $\{|a_i\rangle\}$ la respectiva base ortonormal de autoestados (por simplicidad asumimos que no hay degeneración). Para un i fijo, muestre que $P_i = \Pi_{j\neq i} \frac{A-a_j}{a_i-a_j}$ es el proyector sobre el autoestado de autovalor a_i.

3 **Propiedades del conmutador.**
Pruebe las siguientes identidades para operadores A, B, C en cierto espacio de Hilbert, con $[A, B] := AB - BA$ y $\{A, B\} := AB + BA$.

(a) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (identidad de Jacobi).

(b) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$.

(c) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.

(d) $[A, B] = \{A, B\} - 2BA$.

(e) $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$.

4 Sean A y B dos operadores tales que A conmuta con $[A, B]$. Demostrar que

$$[A^m, B] = mA^{m-1}[A, B].$$

Use esta propiedad para demostrar que

$$[f(A), B] = \frac{df(A)}{dA}[A, B],$$

donde f es una función que admite un desarrollo en serie de potencias de su argumento.

5 (!) **Exponencial de un operador** Dado un operador A, se define formalmente la exponencial de A como

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \,.$$

Compruebe que $e^{\lambda A}$ es la solución a la ecuación diferencial $\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} = Ah(\lambda)$. Además, que si A y B conmutan con $[A, B]$, entonces

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2} \,.$$

Esta es una de las relaciones que se desprenden de la fórmula de Baker-Campbell-Haussdorf. Ayuda: considere la función[1] $g(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B} e^{-\lambda(A+B)}$, demuestre que la misma satisface la ecuación diferencial $\frac{dg}{d\lambda} = \lambda[A, B]g$ y posteriormente resuelva dicha ecuación diferencial.

IMPORTANTE: Notar que, en general, $\boxed{e^{A+B} \neq e^A e^B}$.

$\boxed{6}$ (!) Dados dos operadores A y B, definimos la familia de operadores $C(s)$, parametrizados por $s \in \mathbb{R}$, de la siguiente forma

$$C(s) := e^{sA} B e^{-sA}.$$

Demostrar entonces que:
(i) $\frac{dC(s)}{ds} = [A, C(s)]$, (ii) $\frac{d^2C(s)}{ds^2} = [A, [A, C(s)]]$, (iii) $\frac{d^3C(s)}{ds^3} = [A, [A, [A, C(s)]]]$, y (iv) generelice para la n-ésima derivada de $C(s)$. Utilice esto para expandir $C(s)$ en una serie de Taylor alrededor de $s = 0$ y demostrar que

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots$$

Finalmente, para el caso particular en que $[A, B] = cB$, con $c \in \mathbb{C}$, muestre que

$$e^A B e^{-A} = e^c B.$$

$\boxed{7}$ (a) Considere un operador tal que $A^2 = \mathbb{I}$ (dé un ejemplo concreto de un operador de este tipo). Demuestre que para todo número complejo α y cualquier función f, que pueda ser expresada en series de potencias de su argumento, vale que

$$f(\alpha A) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha))\mathbb{I} + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))A.$$

En particular muestre que $e^{-i\alpha A} = \cos\alpha\mathbb{I} - i\text{sen}\alpha A$.

(b) Considere un operador B tal que $B^3 = B$ (nuevamente, dé un ejemplo). Demuestre que para todo número complejo α y cualquier función f, que pueda ser expresada en series de potencias de su argumento, vale que

$$f(\alpha B) = f(0)\mathbb{I} + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))B + \left(\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0)\right) B^2.$$

En particular muestre que $e^{-i\alpha B} = \mathbb{I} - i\text{sen}\alpha B + (\cos\alpha - 1)B^2$

$\boxed{8}$ **¿Verdadero o falso?**

(a) La traza de un operador depende de la base en la que se escribe el mismo.

(b) $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$, donde X e Y son operadores.

(c) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

(d) Si A es un operador hermítico con desarrollo espectral $A = \sum_i a_i |i\rangle\langle i|$ y f una función analítica, entonces $f(A) = \sum_i f(a_i)|i\rangle\langle i|$.

(e) $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de cierto operador hermítico A. Entonces, $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A.

(f) Si dos observables A y B tienen los mismos autovectores $\{|i\rangle\}$ y el conjunto $\{|i\rangle\}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert, entonces $[A, B] = 0$.

[1] Esta es una función que toma un número real y lo manda a un operador, es decir, es una función con valores en operadores. Su imagen se puede pensar como una curva en el espacio de operadores.

(g) Si dos operadores hermíticos anticonmutan, entonces es posible hallar un autoestado común a ambos operadores.

(h) El producto interno entre dos vectores no cambia cuando a ambos se los transforma con el mismo operador unitario.

9 Sea U un operador unitario, es decir tal que $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$.

(a) Mostrar que los autovalores de U tienen módulo 1.

(b) Mostrar que U siempre se puede escribir como $U = e^{iM}$, donde M es un operador hermítico.

(c) Usando la expresión para U del ítem anterior, mostrar entonces que $U^{-1} = U^\dagger = e^{-iM}$.

10 Dos observables A_1 y A_2, que no involucran explicitamente el tiempo, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con el hamiltoniano ($[A_1, H] = [A_2, H] = 0$). Pruebe que debe haber alguna degeneración en los autoestados de energía. Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

Sistema de dos niveles.

11 **Matrices de Pauli.** En un espacio vectorial V de dimensión 2 considere los operadores $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, que en la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de V, con

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se representan mediante las matrices

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli.*

(a) ¿Son estas matrices hermíticas? Hallar sus autovalores y autovectores en esta base.

(b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \det(\sigma_k) = -1,\ \mathrm{Tr}(\sigma_k) &= 0,\ \sigma_i^2 = I; \\ [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k,\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij}I,\ \sigma_j\sigma_k = i\epsilon_{jkl}\sigma_l + I\delta_{jk}, \end{aligned}$$

donde I representa a la matriz identidad, $k = 1, 2, 3$ ($\equiv x, y, z$), ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita, y δ_{ij} es la delta de Kronecker. En la última identidad se utiliza la notación de suma sobre índices repetidos.

(c) Utilizando las propiedades anteriores muestre que dados dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, vale que

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\,\mathbb{I} + i(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{\sigma}$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

12 Considere una matriz X de 2×2 que se escribe en la forma

$$X = a_0 I + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$$

donde a_0 y $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ son números, y $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

(a) ¿Cómo se relacionan los a_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ con $\mathrm{Tr}(X)$ y $\mathrm{Tr}\,(\sigma_k X)$?

(b) Obtenga a_0 y a_k en término de los elementos de matriz X_{ij}. Muestre que cualquier matriz X hermítica de 2×2 se puede escribir en esta forma.

13 Dado un versor $\hat{\boldsymbol{n}}$, buscamos encontrar los autoestados y autovalores del operador $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Para ello, consideremos dos posibles caminos.

(a) En primer lugar, escriba explícitamente las representaciones matriciales del operador $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, usando la parametrización de $\hat{\boldsymbol{n}}$ en ángulos polares α, β de la figura, y resuelva el problema estándar de autovalores y autovectores.

(b) Alternativamente, considere el operador $P_{\hat{\boldsymbol{n}}} := \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})$. Luego,

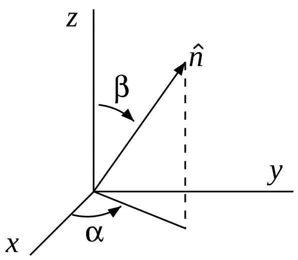
(I) Muestre que $P_{\hat{\boldsymbol{n}}}$ es un proyector.

(II) Muestre que $(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})P_{\hat{\boldsymbol{n}}} = P_{\hat{\boldsymbol{n}}}$. Concluya entonces que para todo vector $|\psi\rangle$ se cumple que $P_{\hat{\boldsymbol{n}}} |\psi\rangle$ es un autovector del operador $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ con autovalor $+1$.

(III) Partiendo del vector $|\psi\rangle = |+\rangle$, utilice el resultado anterior para obtener una expresión del autovector normalizado de $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ de autovalor $+1$, $|+, \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\rangle$, en términos de la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.
Nota: La respuesta es $|+, \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\rangle = \cos\frac{\beta}{2} |+\rangle + \mathrm{sen}\frac{\beta}{2} e^{i\alpha} |-\rangle$. *Para llegar a este resultado será útil tener en cuenta las siguientes relaciones trigonométricas:*

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \qquad \mathrm{sen}2x = 2\mathrm{sen}x \cos x.$$

(IV) Finalmente, encuentre la expresión del autovector $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ de autovalor -1. Sugerencia: aproveche la generalidad del resultado anterior.



Espacios de Hilbert de dimensión infinita.

14 **Operador de posición en la representación de impulso.** Probar que

(a) $\langle p'| \hat{x} |\alpha\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p' |\alpha\rangle$.

(b) $\langle \beta| \hat{x} |\alpha\rangle = \int dp' \, \beta(p')^* \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p'}\right) \alpha(p')$.

15 (a) Verifique que las igualdades

$$[x_i, G(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad\qquad [p_i, F(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

pueden derivarse a partir de las relaciones de conmutación fundamentales, para cualquier par de funciones F y G analíticas.

(b) Evalúe $[x^2, p^2]$. Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico $\{x^2, p^2\}_{\text{clásico}}$ y piense por qué difieren (además del $i\hbar$ usual).

16 **Operador de traslación espacial.** El operador de traslación para un desplazamiento espacial $\mathbf{a}$ finito está dado por

$$\mathcal{T}(\mathbf{a}) = \exp\left(\frac{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}}{\hbar}\right)$$

donde $\mathbf{p}$ es el operador impulso.

(a) Evalue $[x_i, \mathcal{T}(\mathbf{a})]$.

(b) Muestre que $\mathcal{T}$ es un operador unitario usando que $\mathbf{p}$ es hermítico.

(c) Usando los puntos anteriores, encuentre cómo cambia el valor de expectación $\langle \mathbf{x} \rangle$ frente a traslaciones (es decir, cuando el estado en cuestión pasa de ser ψ a su trasladado $\mathcal{T}(\mathbf{a})\psi$). El resultado justifica interpretar a $\mathcal{T}(\mathbf{a})$ como el operador de traslaciones espaciales.

17 Considere un sistema cuyo estado $|\psi\rangle$ es tal que

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{i\frac{x}{r}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$$

con σ y r constantes reales con unidades de longitud.

(a) Calcule la representación del estado $|\psi\rangle$ en la base de momento, $\langle p|\psi\rangle$.

(b) Calcule $\langle\psi|\, p\, |\psi\rangle$, usando: (i) la representación de momento de $|\psi\rangle$; (ii) usando la representación en posición de $|\psi\rangle$ y la propiedad $\langle x|\, p\, |\psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial\langle x|\psi\rangle}{\partial x}$.

(c) Sea $\mathcal{T}(d)$ el operador de traslación en una distancia d. Calcule entonces la representación en las bases de posición y de momento del estado $|\phi\rangle := \mathcal{T}(d)\,|\psi\rangle$.