Mediciones.

1 Considere un sistema físico cuyo espacio de estados es de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortornomal. Sean $A = a|1\rangle\langle 1| - ia|2\rangle\langle 3| + ia|3\rangle\langle 2|$ y $B = b|1\rangle\langle 1| + a|2\rangle\langle 3| + a|3\rangle\langle 2|$ (con a y $b \in \mathbb{R}$) dos observables y suponga que el sistema se encuentra en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|3\rangle .$$

(a) Calcule los autoestados y autovalores de B y escriba $|\psi\rangle$ en esta base de autoestados.

(b) Si se mide B sobre el estado $|\psi\rangle$, ¿qué resultados espera obtener y con qué probabilidad?

(c) Determine el estado del sistema luego de medir $-a$. Repita en caso de haber medido a.

(d) Desarrolle los ítems anteriores para el observable A.

(e) Con el estado inicial $|\psi\rangle$ se mide primero B y luego A obteniéndose $\{a, -a\}$. Calcule la probabilidad de este secuencia de mediciones. Ahora, repitiendo el experimento con el estado inicial $|\psi\rangle$, ahora se mide primero A y luego B, ¿es posible encontrar como resultado el par $\{-a, a\}$. Si es así ¿con qué probabilidad?¿Son los operadores A y B compatibles?

2 Considere un sistema de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. Considere los observables A, B y C dados por

$$\begin{aligned} A &= a(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| - |3\rangle\langle 3|) \\ B &= b(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|) \\ C &= c(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + 2|3\rangle\langle 3|) \end{aligned}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que estos tres operadores conmutan entre sí y poseen una base común de autoestados.

(b) Suponga que se miden los observables A y B sobre el sistema y se obtienen como resultado a y b ¿Puede decir con certeza cuál es el estado de la medición? En caso afirmativo escriba dicho estado.

(c) Suponga ahora que en cambio se miden los observables A y C sobre el sistema, obteniendo los resultados a y c ¿Puede ahora decir con certeza cuál es el estado luego de la medición? En caso afirmativo estado dicho estado.

(d) Diga qué combinaciones de los operadores A, B y C forman un conjunto completo de observables que conmutan (CCOC).

3 Considere un sistema de dimensión 4. Sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$ una base ortonormal del espacio tal que tres dados observables A, B y C están dados por

$$A = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = b|1\rangle\langle 1| + b|2\rangle\langle 2| - b|3\rangle\langle 4| - b|4\rangle\langle 3|, \quad \begin{cases} C|1\rangle &= c|1\rangle + ic|2\rangle \\ C|2\rangle &= c|2\rangle - ic|1\rangle \\ C|3\rangle &= c|3\rangle \\ C|4\rangle &= c|4\rangle \end{cases}$$

(a) Determine qué combinaciones de los operadores A, B y C conmutan entre sí y en tales casos encuentre una base común de autoestados.

(b) Diga qué combinación de los operadores A, B y C forman un CCOC. En los casos enq ue los operadores conmutan, pero no forma un conjunto completo, proponga un nuevo observable que junto a ellos sí forme un CCOC.

4 Un sistema de dimensión 2 está en un autoestado de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.

(a) Si se mide S_z, ¿cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$? Verifique que los casos $\gamma = 0, \pi/2$ tienen sentido. Responder la misma pregunta si lo que se mide es S_x.

(b) Suponer ahora que al realizar una medición de S_x se obtuvo el valor $-\hbar/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir S_z inmediatamente después se obtenga también $-\hbar/2$?

Representación de Schrodinger.

5 **Precesión del espín.**El hamiltoniano de un sistema de espín 1/2 en un campo magnético externo uniforme B en la dirección z está dado por

$$H = -\left(\frac{eB}{mc}\right) S_z = -\omega S_z \ .$$

(a) Verificar que los autoestados de S_z $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son también autoestados de la energía, y calcular los correspondientes autovalores.

(b) Suponer que a $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ (que corresponde al estado $|S_x, +\rangle$). Hallar la evolución temporal $|\alpha(t)\rangle$ de dicho estado. ¿Qué resultados pueden obtenerse al medir S_x a un tiempo posterior? ¿Con qué probabilidades?

(c) Calcular $\langle S_x\rangle$ y $\langle S_y\rangle$ en función del tiempo (Esta rotación de los valores de expectación da cuenta de la *precesión del espín*).

(d) Encontrar el versor $\hat{\mathbf{n}}(t)$ para el cual $|\alpha(t)\rangle$ resulta ser autoestado de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}(t)$.

6 El espacio de estados de cierto sistema físico se puede describir con un espacio de Hilbert de dimensión 3, siendo $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ una base ortonormal. En dicha base el hamiltoniano H del sistema y dos observables A y B están dados por

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega_0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} ,$$

donde ω_0, a, y b son constantes positivas. A $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$.

(a) A $t = 0$ se mide la energía del sistema. ¿Qué valores pueden encontrarse y con que probabilidad? Calcular $\langle H\rangle$ y $\langle \Delta H\rangle$ para el estado $|\psi(0)\rangle$.

(b) Si a $t = 0$ en lugar de medir H se mide A, ¿qué resultados pueden obtenerse y con qué probabilidad? ¿Cuál es el vector de estado inmediatamente después de la medición? Repetir el cálculo si en lugar de A se mide B.

(c) Si a $t = 0$ no se realiza medición alguna, hallar $|\psi(t)\rangle$. Repetir el cálculo si a $t = 0$ se midió: (i) H, (ii) A, o (iii) B. Discutir, en cada caso, qué resultados se obtendrían si se midiesen A, B o H al instante t.

7 Se tiene una molécula triatómica y con $|\psi_n\rangle$ ($n = 1, 2, 3$) se representa el estado normalizado de un electrón completamente localizado en el átomo n-ésimo. Si se desprecia la posibilidad de que un electrón salte de un átomo a otro, el hamiltoniano H_0 del sistema es tal que $|\psi_n\rangle$ es autovector de H_0 con el mismo autovalor E_0 para todo n. Para tener en cuenta la posibilidad de que un electrón salte de átomo se agrega a H_0 una interacción W definida por la siguiente acción

$$W|\psi_n\rangle = -a\left(|\psi_{n-1}\rangle + |\psi_{n+1}\rangle\right) ,$$

con $a > 0$ (usamos notación cíclica: $|\psi_{3+1}\rangle \equiv |\psi_1\rangle$ y $|\psi_{1-1}\rangle \equiv |\psi_3\rangle$).

(a) Hallar los autovalores de $H = H_0 + W$ y su degeneración. ¿Está el electrón localizado en un sólo átomo cuando se encuentra en el estado fundamental?

(b) Suponga que a $t = 0$ el electrón se encuentra localizado en el átomo 1. Hallar la probabilidad de encontrarlo localizado en el átomo 3 para cierto $t > 0$.

Picture de Heisenberg.

8 Los postulados que vimos hasta ahora los escribimos en el llamado *Picture de Schrödinger*, en el cual son los estados del sistema los que tienen una evolución dinámica. En el llamado *Picture de Heisenberg*, en cambio, son los observables los que evolucionan mientras que el estado del sistema está siempre fijo (ver Complemento $\mathrm{G_{III}}$ del libro de Cohen-Tannoudji).

(a) Probar que los valores de expectación de un operador no dependen de la representación.

(b) Mostrar que el operador hamiltoniano es igual en ambos pictures.

9 Demostrar que el valor de expectación de un observable $A(t)$ en el estado $|\psi(t)\rangle$ satisface

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle .$$

(a) Derivar el teorema de Ehrenfest a partir de este resultado.

(b) Utilizar esta fórmula para estudiar nuevamente la precesión del espín (ver ejercicio 4).

10 Sea $X(t)$ el operador coordenada para una partícula libre en una dimensión en el picture de Heisenberg. Calcular $[X(t), X(0)]$.

11 Considere una partícula en un potencial unidimensional $V(X) = -kX$ (por ejemplo, puede corresponder a un campo gravitatorio o a un campo eléctrico uniforme).

(a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición X y el momento P de la partícula. Integre las ecuaciones y compare con el resultado clásico.

(b) Muestre que la dispersión $\langle(\Delta P)^2\rangle$ no varía en el tiempo.

(c) Escriba la ecuación de Schrödinger en la representación de momentos. Deduzca luego una relación entre $\partial_t|\psi(p,t)|^2$ y $\partial_p|\psi(p,t)|^2$. Integre la ecuación e interprete.

Relación de incerteza generalizada.

12 (a) Una forma relativamente sencilla de derivar la desigualdad de Schwarz es la siguiente. Primero observe que

$$(\langle\alpha| + \lambda^* \langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle + \lambda\,|\beta\rangle) \geq 0$$

para cualquier número complejo λ. Luego, elija λ de tal forma que la desigualdad anterior se reduzca a la desigualdad de Schwarz, $\langle\alpha|\alpha\rangle\,\langle\beta|\beta\rangle \geq |\,\langle\alpha|\beta\rangle\,|^2$.

(b) Para dos observables A y B y un estado cualquiera, demostrar la relación de incerteza de Schrödinger,

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [A,B] \rangle \right|^2 + \frac{1}{4} \left| \langle \{A,B\} \rangle - 2 \langle A \rangle \langle B \rangle \right|^2 ,$$

donde $\Delta A = A - \langle A \rangle$. Note que la relación de incerteza de Heisenberg se desprende de ésta.

(c) Muestre que la relación de incerteza generalizada satura si el estado en cuestión satisface

$$\Delta A \left| \psi \right\rangle = \lambda \Delta B \left| \psi \right\rangle , \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Además, concluya que si λ es un imaginario puro entonces se obtiene la igualdad en la relación de incerteza de Heisenberg.

(d) Verificar la relación de incerteza para los operadores $A = S_x$ y $B = S_y$, en el estado $|S_x = +\rangle$.

13 Consideremos un sistema de spin 1/2 y veamos las implicancias del principio de incertidumbre.

(a) En primer lugar, muestre que en este caso se tiene que

$$\mathrm{Var}(S_j) = \frac{\hbar^2}{4}(1 - \langle \sigma_j \rangle^2), \qquad K(S_j, S_k) = \frac{\hbar^2}{4}(\delta_{jk} - \langle \sigma_j \rangle \langle \sigma_k \rangle).$$

(b) Muestre que si el estado es tal que $\mathrm{Var}(S_j) = 0$ (¿para qué estados es esto posible?), entonces $\langle S_k \rangle = 0$ para $k \neq j$ y $K(S_j, S_k) = 0$ para todo k. Interprete las consecuencias físicas de estos resultados.

(c) Demuestre que para cualquier estado $|\psi\rangle$ de un sistema de spin 1/2 existe algún λ complejo tal que se satisface la condición $(\sigma_x - \langle \sigma_x \rangle) |\psi\rangle = \lambda (\sigma_y - \langle \sigma_y \rangle) |\psi\rangle$. Encuentre λ para el estado más general.

(d) Utilizando todo lo anterior, muestre que del principio de incertidumbre generalizado se deduce que $\Sigma_l \langle \sigma_l \rangle^2 = 1$.

Sistemas compuestos y matriz densidad.

14 (a) Sean $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, y $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Diga entonces a qué espacio pertenece $v \otimes w$ y escriba su expresión en la base canónica.

(b) Sean $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ y $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ bases de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. Considere además los estados

$$|\Phi\rangle = \alpha |\phi_1\rangle + \beta |\phi_2\rangle , \qquad \text{y} \qquad |\Psi\rangle = a |\psi_1\rangle + b |\psi_2\rangle + c |\psi_3\rangle .$$

Escriba entonces $|\Psi\rangle \otimes |\Phi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Encuentre además la expresión matricial de este estado en la base producto $\{|\phi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle\}$.

(c) Sea una particula de spin 1/2 y otra de spin 1. Los operadors de spin en la dirección x se escriben, en las respectivas bases de autoestados de spin en la dirección z, como

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(para spin 1/2)}, \quad y \quad L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(para spin 1)}.$$

Escriba la representación matricial del operador $S_x \otimes L_x$ en la base producto de autoestados de spine en la dirección z.

15 **Entrelazamiento.** Decimos que un estado $|\psi\rangle$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ está **entrelazado** si no existen $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ y $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ tales que $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Demostrar que el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 + |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2\right)$ está entrelazado, donde los subíndices 1 y 2 se utilizan para diferenciar los estados spin 1/2.

16 **Base producto y base de Bell.** Considere un sistema compuesto de dos partes, que denotaremos A y B, ambas descriptas por un espacio de Hilbert de dimensión 2; por ejemplo, dos spines 1/2. Asimismo, sean σ_i^A y σ_i^B $(i = x, y, z)$ observables sobre cada subsistema que actúan como las matrices de Pauli, de forma tal que elegimos la base $\{|+\rangle_A, |-\rangle_A\}$ (para el subsistema A) que diagolaniza σ_z^A y análogamente para B.

(a) Considere el subconjunto de observables sobre el sistema compuesto: $\left\{\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B, \mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B\right\}$. Muestre que forman un conjunto completo de observables que conmutan y encuentre una base común de autoestados. ¿Qué propiedad satisfacen los elementos de esta base?

(b) Considere el conjunto de observables sobre el sistema compuesto: $\left\{\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B, \sigma_x^a \otimes \sigma_x^B\right\}$. Muestren que forman un conjunto completo de observables que conmutan y encuentre una base común de autoestados. ¿Qué propiedad satisfacen los elementos de esta base?

(c) Considere los operadores $\sigma_x^A \otimes \sigma_z^B$ y $\sigma_z^A \otimes \sigma_x^B$. Diga si forman un CCOC y en ese caso encuentre la base común de autoestados.

17 La siguiente (pseudo) paradoja fue propuesta por D. Mermin (Am. J.Phys. 58, 731 (1990) o *Phys. Rev. Lett. 65 3373 (1990)*). Considere un sistema de 3 partículas de spin 1/2 A, B y C que se preparan en el estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+++\rangle - |---\rangle)$. Cada partícula es llevada a un laboratorio distante de modo tal que el estado del conjunto no se modifica durante el viaje.

(a) Muestre que $|\Psi\rangle$ es un autoestado de los siguientes operadores: $O_1 = \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y$, $O_2 = \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y$, $O_3 = \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x$ y $O_4 = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x$. Diga cuales son los autovalores correspondientes.

(b) Suponga que en cada laboratorio se mide σ_x obteniendose los valores $m_x^{(A)}$, $m_x^{(B)}$ y $m_x^{(C}$ ¿Cuánto vale el producto de estos tres valores medidos?

(c) Suponga en cambio que en cada laboratorio se toma la decisión (de manera independiente y aleatoria) de medir σ_x o σ_y. Considere un experimento en el cual dos observables miden σ_y y uno mide σ_x ¿Cuánto vale el producto de los tres resultados?

(d) El sentido común (clásico) nos indica que el resultado de la medición de σ_x en A no puede depender de cual haya sido el observable que midieron B y C. Y equivalentemente para cada laboratorio. Discuta este argumento.

(e) En consecuencia, si los valores medidos de σ_j en cada laboratorio los denominamos $m_j^{(A,B,C)} = \pm 1$ debemos concluir que $m_x^{(A)} m_y^{(B)} m_y^{(C)} = +1$, $m_y^{(A)} m_x^{(B)} m_y^{(C)} = +1$ y $m_y^{(A)} m_y^{(B)} m_x^{(C)} = +1$ ¿Es esto compatible con la igualdad $m_x^{(A)} m_x^{(B)} m_x^{(C)} = -1$?

18 **Matriz densidad.**

(a) Considere un ensamble de sistemas de spin 1/2 que se prepara generando una mezcla estadística con 75 % de autoestados $+\hbar/2$ de S_z y 25 % de autoestados de $-\hbar/2$ de S_z. Escriba la matriz densidad correspondiente en la base de autoestados de S_z.

(b) Considere ahora un ensamble que se prepara con 50 % de estados $|a\rangle$ y 50 % de estados $|b\rangle$, donde

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,|+\rangle + |-\rangle), \qquad |\beta\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,|+\rangle - |-\rangle),$$

donde $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ son los autoestados de S_z. ¿Qué estados físicos representan $|a\rangle$ y $|b\rangle$?

19 **Pureza**. Sea ρ la matriz densidad que representa el estado de un sistema cuántico. Se define la *pureza* del estado ρ a la cantidad $\mathrm{Tr}(\rho^2)$.

(a) Mostrar que $\frac{1}{D} \leq \mathrm{Tr}(\rho^2) \leq 1$, donde D es la dimensión del espacio de Hilbert.

(b) Muestre que si el estado es puro, entonces $\rho^2 = \rho$ y por la tanto la pureza es máxima. Muestre que además vale la vuelta, es decir que si la pureza es máxima, entonces necesariamente ρ es un estado puro.

(c) Mostrar que para un estado mixto, $\mathrm{Tr}(\rho^2) < 1$.

(d) Se llama *estado máximamente mixto* al estado $\rho = \frac{1}{D}\mathbb{I}$. Verifique que esta definición satisface todas las condiciones necesarias para ser un estado cuántico. Muestre que el estado máximamente mixto tiene pureza mínima.

20 Considere el *estado de Werner* de dos sitemas de dimensión dos, cuya matriz densidad es

$$\rho_{12} = p \left|\Psi^-\right\rangle \left\langle\Psi^-\right| + \frac{1-p}{4}\mathbb{I}_{12}$$

con $0 \leq p \leq 1$, $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$, y $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ los autoestados de σ_z con autovalor $+1$ y -1 respectivamente.

(a) Calcule la pureza del estado en función de p y grafíquela. Interprete ¿En qué casos es el estado puro? ¿Qué estado se tiene para $p = 0$?

(b) Calcule las matrices densidad reducida ρ_A y ρ_B ¿Dependen estas de p? Para el caso en que el estado global es puro, ¿el estado está entrelazado o no? Justifique.

(c) Calcule el valor de expectación de la función de correlación $K(y, y) := \langle\sigma_y \otimes \sigma_y\rangle_{12} - \langle\sigma_y\rangle_1 \langle\sigma_y\rangle_2$. Interprete.

21 **Bola de Bloch.** Considere un sistema de spin 1/2.

(a) Muestre que la matriz densidad se puede escribir siempre de la forma

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}),$$

donde $\mathbb{I}$ es el operador identidad, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Calcule la pureza de ρ y encuentre cómo se relaciona con $\mathbf{P}$. En particular, ¿qué satisface $\mathbf{P}$ si el estado es puro? ¿Y si es mixto? Relacione esto con la representación en la esfera de Bloch para spin 1/2.

(c) Calcule $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$. ¿Cuál es la interpretración física de $\mathbf{P}$?

(d) Suponga que ρ describe un ensamble en un estado puro y suponga que se mide $\langle S_z\rangle$ y $\langle S_x\rangle$. ¿Puede determinar unívocamente el estado del sistema? ¿Cuánto vale $\langle S_y\rangle$? Si ahora en cambio el sistema puede estar en un estado mixto, ¿basta con conocer $\langle S_z\rangle$ y $\langle S_x\rangle$ para determinar el estado del sistema?

22 **Evolución temporal en la bola de Bloch.** Considere un sistema de spin 1/2. En presencia de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{z}$, el Hamiltoniano del sistema se puede escribir como $H = \omega S_z$. Determine el vector $\mathbf{P}(t)$ que corresponde a la matriz densidad evolucionada $\rho(t)$. Interprete el resultado.