$\boxed{1}$ **Resolución algebraica del oscilador armónico unidimensional.**

(a) Suponer que se tiene un operador N con autovalores n y un operador a tales que $[N, a] = -ca$ con $c \in \mathbb{C}$. Llamamos $|n\rangle$ al autoestado de N con autovalor n (suponemos que no hay degeneración).

I- Mostrar entonces que $a|n\rangle$ es autoestado de N con autovalor $n - c$

II- Si N es hermítico, mostrar que $a^\dagger|n\rangle$ es autoestado de N con autovalor $n + c$, con n y c reales. Notar que si c es positivo entonces a baja los autovalores y se lo llama *operador de bajada o aniquilación* mientras que $a^\dagger$ los sube y se lo llama *operador de subida o creación*.

(b) Considere un oscilador armónico en una dimensión, y las siguientes definiciones

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,,$$

donde $\{|n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son autoestados de $N := a^\dagger a$ con autovalor n.

I- Calcular el conmutador $[a, a^\dagger]$ y comprobar que se verifiquen las relaciones de conmutación del inciso (a) con $c = 1$.

II- Muestre que los autovalores de N son enteros no negativos, asumiendo que existe el estado $|0\rangle$. Por lo tanto $n \in \mathbb{N}$.

III- Mostrar que $H = \hbar\omega(N + 1/2)$, con lo que los autestados de N coinciden con los de H.

IV- Evalúe $\langle m|x|n\rangle$, $\langle m|p|n\rangle$, $\langle m|\{x,p\}|n\rangle$, $\langle m|x^2|n\rangle$ y $\langle m|p^2|n\rangle$.

$\boxed{2}$ **Existencia del estado fundamental.** Resuelva la ecuación diferencial $a\,|0\rangle = 0$ en representación de coordenadas para obtener el estado fundamental. Obtener luego el primer estado excitado del oscilador armónico unidimensional a partir de la relación $a^\dagger\,|0\rangle = |1\rangle$.

$\boxed{3}$ **Incerteza para estados del oscilador cuántico.** Utilizando los resultados del ejercicio anterior, muestre que los autoestados del oscilador armónico unidimensional satisfacen la siguiente relación,

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2\,.$$

¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

$\boxed{4}$ **Estados coherentes.** Se definen los estados coherentes de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a,

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\lambda\rangle\,,$$

donde α es en general un número complejo (note que a es no hermitíco).

(a) Calcule $\langle\alpha|\,a\,|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|\,a^\dagger\,|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|\,a^2\,|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|\,(a^\dagger)^2\,|\alpha\rangle$.

(b) Calcule el valor medio y varianza del operador de número N, de energía (Hamiltoniano) H, del operador oposición X, del operador momento P para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

(c) A partir de los resultados anteriores demuestre que todo estado coherente satisface la relación de mínima incerteza. ¿Qué dice esto sobre la función de onda de un estado coherente? Escriba explícitamente la función de onda $\langle x|\alpha\rangle$.

(d) Usando la representación de Heisenberg calcula los valores medios de posición y momento en función del tiempo, $\langle x(t)\rangle$ y $\langle p(t)\rangle$, para un estado coherente $|\alpha\rangle$. ¿Cómo puede interpretar estos resultados? (puede por ejemplo mirar los casos particulares en que α es real o imaginario puro).

(e) Muestre que la descomposición de un estado coherente $|\alpha\rangle$ en la base $\{|n\rangle\}$ es

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \,.$$

Sugerencia: le puede resultar útil recordar que $|n\rangle = \frac{(\alpha^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$ y luego pida que $|\alpha\rangle$ esté normalizado.

(f) Muestre que el producto interno $\langle\beta|\alpha\rangle$ entre dos estados coherentes, $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$, es

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha\beta^*)\right]$$

¿Son los estados coherentes ortogonales?¿Por qué?

(g) [$*$] Muestre que los estados coherentes forma una base, es decir que satisface la relación de completitud

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\, |\alpha\rangle \langle\alpha| = \mathbb{I},$$

donde $d^2\alpha = d\mathrm{Re}\alpha d\mathrm{Im}\alpha$.
Sugerencia: Use la expansión de los estados coherentes en la base de autoestados del operador número y luego escriba la integral en coordenadas polares usando que $\alpha = re^{i\phi}$. Finalmente use que $\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi} = 2\pi\delta_{nm}$ y $\int dt e^{-t}t^n = n!$ con $n, m \in \mathbb{N}_0$.

$\boxed{5}$ **Operador desplazamiento en el espacio de fase.** Se define el *operador de desplazamiento* en el espacio de fases como

$$D(\alpha) = \exp\left(\alpha a^\dagger - \alpha^* a\right)$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Muestre que $D(\alpha)$ es unitario y además $D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$.

(b) Muestre que $D(\alpha+\beta) = D(\alpha)D(\beta)e^{-i\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)}$.

(c) Muestre que

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha \qquad D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$$
$$D^\dagger(\alpha) x D(\alpha) = x + \sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}}2\mathrm{Re}\alpha \quad D^\dagger(\alpha) p D(\alpha) = p + \sqrt{\tfrac{\hbar m\omega}{2}}2\mathrm{Im}\alpha.$$

(d) Muestre que el estado $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ es un autoestado del operador de aniquilación a. ¿Cuál es el autovalor correspondiente?¿Qué tipo de estado es $|\alpha\rangle$

(e) Muestre que la acción de $D(\alpha)$ sobre el autoestado $|0\rangle$ de energía satisface

$$D(\alpha)|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \exp \alpha a^\dagger\, |0\rangle \,.$$

Luego, expanda $\exp \alpha a^\dagger$ en serie de potencias y encuentre la expansión del estado $|\alpha\rangle$ en la base de autoestado de energía, $\{|n\rangle\}$. Compare con lo obtenido en el ejercicio anterior.

(f) Evalúe $D(\alpha)$ para los casos particular en que (i) α es real, y (ii) α es imaginario puro. ¿Qué operadores se obtienen en tales casos? Y para el caso de α complejo arbitrario, ¿cómo puede extender esta interpretación del operador $D(\alpha)$?

(g) Utilizando cómo transforman x y p ante la acción de $D(\alpha)$, calcule el valor medio y varianza de posición y momento en los estados coherentes.

$\boxed{6}$ Considere un oscilador en un estado inicial formado por una superposición de dos estados coherentes; $|\psi\rangle = N(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$.

(a) Calcule el factor de normalización N.

(b) Calcule y grafique cualitativamente las densidades de probabilidad $|\langle x|\psi\rangle|^2$ y $|\langle p|\psi\rangle|^2$. ¿Cómo cambian en función del tiempo?

(c) Calcule los valores medios $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$ en función del tiempo.

$\boxed{7}$ **Estados squeezed del oscilador armónico.** Considere una partícula en un potencial armónico unidimensional de frecuencia ω. Se define el operador de *squeezing* $S(r)$ como

$$S(r) = \exp\frac{r}{2}\left(a^2 - a^{\dagger 2}\right),$$

donde $r \in \mathbb{R}$ y a y $a^\dagger$ son los operadores usuales de aniquilación y creación.

(a) Verifique que $S(r)$ es unitario y que $S^{-1}(r) = S(-r)$.

(b) Muestre que los operadores de posición y momento transformado por la transformación de *squeezing* son $S^\dagger(r)XS(r) = e^{-r}X$ y $S^\dagger(r)PS(r) = e^{r}P$. En base a este resultado interprete cómo actúa el operador de squeezing.

(c) Dado $r \in \mathbb{R}$, definimos los operadores

$$Q_r = e^{r}X, \quad P_r = e^{-r}P, \quad a_r = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(Q_r + i\frac{P_r}{m\omega}\right).$$

Calcule $[Q_r, P_r]$ y $[a_r, a_r^\dagger]$. ¿Qué reglas de conmutación satisface estos operadores? Interprete. ¿Cómo se relacionan estos operadores con las transformaciones de squeezing?

(d) Dado un estado coherente del oscilador, $|\alpha\rangle$, definimos el estado coherente *squeezed* como: $|\alpha, r\rangle = S(r)\,|\alpha\rangle$. Muestre que $|\alpha, r\rangle$ es autoestado del operador a_r. ¿Cuál es el autovalor correspondiente? Interprete.

(e) Calcule el valor medio y varianza de la posición X y el momento P del estado coherente squeezed $|\alpha, r\rangle$. ¿Cuánto vale el produto de varianza?¿Qué nos dice esto sobre la función de onda de los estados?¿Cómo puede interpretar (cualitativamente) el estado $|\alpha, r\rangle$?

$\boxed{8}$ **Oscilador armónico forzado.**
Considere el problema de un oscilador armónico unidimensional formazado, con Hamiltoniano

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 X^2 - FX.$$

donde X y P son los operadores posición y momento, respectivamente, y F es una constante real con unidades de fuerza (que puede corresponder, por ejemplo, a un campo gravitatorio o un campo electrostático uniforme).

(a) Escriba el Hamiltoniano H en función de los operadores de a y $a^\dagger$.

(b) Sea $N = a^\dagger a$ el operador de número del oscilador armónico ordinario y $\{|n\rangle\}$ su base de autoestados. ¿Coincide la base de autoestados del operador N con la del Hamiltoniano forzado?

(c) Dado un autoestado $|n\rangle$ de N, definimos el estado trasladado a una distancia ℓ, $|n, e \ll\rangle$ como

$$|n, \ell\rangle = e^{-i\frac{P\ell}{\hbar}} |n\rangle \, .$$

Encuentre el valor ℓ tal que $|n, \ell\rangle$ es autoestado del Hamiltoniano forzado. Interprete el resultado. ¿Cuál es la energía correspondiente?

(d) Recuerde que un estado coherente del oscilador armónico ordinario, $|\alpha\rangle$, se puede escribir como $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$, donde $D(\alpha)$ es el operador de desplazamiento. Deduzca entonces que $|0, \ell\rangle$ es un estado coherente del oscilador ordinario. ¿Cuál es el valor de α correspondiente?

(e) Calcule la varianza de la posición y del momento en el estado $|n, \ell\rangle$. Verifique que se satisface la relación de incerteza generalziada. ¿Qué sucede para $n = 0$?¿Qué nos dice esto sobre la función de onda del estado fundamental del oscilador forzado?(Sugerencia: calcule los operadores transformados $e^{iP\ell/\hbar} X e^{-iP\ell/\hbar}$, $e^{iP\ell/\hbar} P e^{-iP\ell/\hbar}$, $e^{iP\ell/\hbar} X^2 e^{-iP\ell/\hbar}$, $e^{iP\ell/\hbar} P^2 e^{-iP\ell/\hbar}$, y luego use las expresiones de los valores medios de posición y momento del oscilador ordinario calculados en el primer ejercicio.

(f) Usando la representación de Heisenberg calcule $X(t)$ y $P(t)$. Use esto para luego calcular $\langle x(t)\rangle$ y $\langle p(t)\rangle$ para un estado de energía $|n, \ell\rangle$.

$\boxed{9}$ **Electrón en un campo magnético. Niveles de Landau.** El Hamiltoniano de un electrón en presencia de un campo magnético externo estático con potencial vector $\mathbf{A}(x, y, z)$ está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(x, y, z)\right]^2 .$$

Definimos los operadores Π_i, $i = x, y, z$ como

$$\Pi_i = p_i - \frac{eA_i}{c}.$$

(a) Escriba el Hamiltoniano en función de los operadores Π_i.

(b) Calcule $[x_i, \Pi_j]$ (donde x_i, $i = 1, 2, 3$ son los operadores de posición x, y, z). ¿Qué relaciones de conmutación se obtienen? Interprete.

(c) Calcule $[\Pi_i, \Pi_j]$. Interprete.

Considere el caso en que el campo magnético es uniforme en la dirección $\hat{e}_z$, es decir $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$. En tal caso, en un gauge apropiado se puede tomar como potencial vector $\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y)\hat{e}_x + A_y(x, y)\hat{e}_y$, con $A_x = -By/2$, $A_y = Bx/2$. En este gauge tenemos que $\Pi_z = p_z$.

(d) Muestre que entonces $[p_z, H] = 0$. ¿Qué consecuencias tiene esto? ¿Cuáles son los autovalores del operador p_z?

(e) ¿Cuánto vale el conmutador $[\Pi_x, \Pi_y]$ en este caso? Muestre que redefiniendo los operadores Π_x y Π_y multiplicándolos por una constante apropiada, se obtiene la relación de conmutación canónica.

(f) Concluya entonces que los autovalores del Hamiltoniano del electrón en el campo magnético uniforme son

$$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{R}$. Interprete.

10 **Modelo de Jaynes-Cummings.** Considere un átomo de dos niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ cuyo Hamiltoniano puede tomarse como

$$H_A = \frac{\hbar\omega_A}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) = \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z,$$

donde $\hbar\omega_A = E_e - E_g$ es el gap de entre los niveles del átomo. El átomo interactúa con un único modo del campo electromagnético cuantizado en el interior de una cavidad cuyo Hamiltoniano es

$$H_C = \hbar\omega_C\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right),$$

donde $a^\dagger$ y a son los operadores de creación y destrucción de fotones. En la aproximación dipolar, la interacción entre el átomo y el campo electromagnético se reduce a una interacción entre el dipolo eléctrico del átomo ($\mathbf{d}$) y el campo eléctrico en la cavidad ($\mathbf{E}$), dada por $H_{\text{int}} = -\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}$. En la aproximación de onda rotante (*rotating wave approximation*) se desprecian los términos que oscilan rápidamente y la interacción puede aproximarse como

$$H_{\text{int}} \approx -i\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_+\otimes a - \sigma_-\otimes a^\dagger\right),$$

donde $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ y $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$. De esta forma, el sistema completo está descripto por el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

$$H_{JC} = H_A + H_C + H_{\text{int}} = \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z + \hbar\omega_C\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) - i\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_+\otimes a - \sigma_-\otimes a^\dagger\right).$$

(a) Definimos el operador número de excitaciones como

$$N = a^\dagger a + |e\rangle\langle e|.$$

Escriba los autoestados y autovalores del operador N. ¿Están degenerados los autovalores de N?

(b) Muestre que $[N, H_{JC}] = 0$. Por lo que se puede elegir una base común de autoestados (se interpreta que el número de excitaciones se converva).

(c) Aprovechando lo anterior, muestre que el problema de diagonalizar H_{JC} se reduce al problema de diagonalizar matrices de $2x2$ correspondientes a cada número de excitación n ($n \geq 1$), ¿qué se tiene en el caso de cero excitaciones?. Diagonalice el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings en cada subespacio invariante. **Ayuda.** Al ser un problema de dos estados podemos usar lo conocido para diagonalizar un sistema general de dos estados, cuyo Hamiltoniano se escribe en la base $\{|e, n-1\rangle = |+\rangle, |g, n\rangle = |-\rangle\}$ como $H_n = \hbar(a_n + \mathbf{b}_n\cdot\boldsymbol{\sigma})$, donde $a_n = \omega_C n$, $\mathbf{b}_n = \frac{\Omega}{2}\sqrt{n}\hat{y} + \frac{\Delta}{2}\hat{z}$, $\Delta = \omega_A - \omega_C$ es la *desintonía* y las matrices de Pauli se refieren a la base especificada.

(d) Especialice la solución exacta de los autoestados y energías para los dos siguientes casos límite: (i) la frecuencia de Bohr del átomo ω_A coincide con la de la cavidad ω_C (caso resonante); (ii) ambas frecuencias son muy distintas (régimen dispersivo), $|\Delta| \gg \Omega$, considerando independientemente los casos $\Delta > 0$ y $\Delta < 0$.