Álgebra del momento angular

1 * **Grupo SU(2).** Considere las matrices unitarias de determinante uno de 2×2: $SU(2)$. Muestre que forman un grupo con el producto '.' dado por multiplicar matrices, es decir, que satisfacen

- $g.g' \in SU(2)$ si $g, g' \in SU(2)$
- $\forall g \in SU(2) \quad \exists g' \in SU(2)$ tal que $g'.g = g.g' =$Id. Se suelde decir que $g' = g^{-1}$.
- La matriz identidad satisface $g.$Id=Id.$g = g, \quad \forall g \in SU(2)$.
- $g.(h.f) = (g.h).f$, para todo $g, h, f \in SU(2)$

Mostrar que toda matriz de $SU(2)$ se puede escribir de la forma

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

con α y β números complejos tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Concluir que los elementos de $SU(2)$ corresponden a puntos en una tres-esfera S^3 embebida en $\mathbb{R}^4$. Los grupos que admiten una estructura de superficie (*variedad* es el término) se denominan grupos de Lie: en este caso al grupo $SU(2)$ se le da la estructura diferenciable de S^3.

2 * **Generadores de SU(2).** La versión infinitesimal de $SU(2)$, su álgebra: se define el álgebra de un grupo de Lie como el tangente al elemento identidad. Para entender esto, considere una familia de elementos de $SU(2)$ arbitrarios en la forma del ejercicio anterior, con $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ funciones del parámetro t restringidas a la condición (A) $|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1$. Queremos tomar el tangente en la identidad, por lo tanto $\alpha(0) = 1$ y $\beta(0) = 0$. Derive respecto a t cada elemento de matriz así como la condición (A), evalúe a $t = 0$ y concluya que el álgebra $su(2)$ se puede pensar como las matrices de la forma

$$\dot{g}|_{t=0} = X = \begin{pmatrix} i\lambda & z \\ -\bar{z} & -i\lambda \end{pmatrix}$$

con λ real y z complejo.

3 **Álgebra su(2).** El álgebra de $su(2)$ en términos abstractos: considerar un espacio vectorial de tres dimensiones, con un producto que en una base $\{J_1, J_2, J_3\}$ toma la forma:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

Mostrar que este espacio vectorial es un algebra de Lie, o sea que el producto satisface la propiedad de Jacobi:

$$[J_1, [J_2, J_3]] + [J_2, [J_3, J_1]] + [J_3, [J_1, J_2]] = 0$$

Este es el álgebra del grupo $SU(2)$ (denominada $su(2)$) y codifica toda la información del grupo (no siempre sucede esto con otros grupos y sus álgebras). Los J_i se denominan *generadores* del grupo, ya que al exponenciarlos se recupera el grupo de Lie.

Aclaración: este es el álgebra $su(2)$ pero donde los generadores no tienen la forma de la matriz X del ejercicio anterior, sino iX, por esto es que va a aparecer siempre $-iJ_j$ en las exponenciales para formar un elemento del grupo.

4 **Clasificación de las representaciones de su(2).** Para hablar de otras representaciones de $su(2)$, construya los operadores de subida y bajada $J_\pm \doteq J_x \pm iJ_y$ a partir de la base del ejercicio 3, tales que $[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm$. Muestre además que

(a) Un Casimir (elemento que conmuta con todo) de $su(2)$ es $J^2 = J_iJ_i$. Se puede ver que es el único Casimir de $su(2)$.

(b) Mostrar que si m es autovalor de J_z y $j(j+1)$ es autovalor de J^2, con autoestado correspondiente $|j\ m\rangle$, entonces j es semientero positivo, m varía en saltos de 1 y

$$-j \leq m \leq j$$

(usar que J_i deben ser observables). Concluir que los estados $|j\ m\rangle$ son una base ortonormal de $\mathbb{C}^{j(j+1)}$, para j fijo. Esta es una *representación irreducible* (dado j). Ayuda: ver por ejemplo la sección 3.5 del Sakurai o el capítulo 7 del Ballentine.

(c) Si $\langle j\,m|j'\,m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$, mostrar que

$$\langle j'\,m'|J_\pm|j\,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\delta_{jj'}\delta_{m',\,m\pm 1}$$

Rotaciones.

$\boxed{5}$ Sean $\{V_x, V_y, V_z\}$ tres operadores. Decimos que V_i son las componentes de un *operador vectorial* si ante rotaciones V_i transforma de la forma

$$\mathcal{D}^\dagger(R)V_i\mathcal{D}(R) = \sum_j R_{ij}V_j,$$

donde R es la matriz que define la rotación en $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{D}(R)$ es el operador de rotación asociado en el espacio de Hilbert.

(a) Considere un estado arbitrario $|\psi\rangle$ de un sistema, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo ϕ alrededor del eje $\hat{z}$, es decir

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \mathcal{D}(\hat{z},\phi) = \exp\left(-i\frac{J_z\phi}{\hbar}\right)|\psi\rangle\,.$$

Calcule los valores medios $\langle\psi'|\,V_x\,|\psi'\rangle$, $\langle\psi'|\,V_y\,|\psi'\rangle$ y $\langle\psi'|\,V_z\,|\psi'\rangle$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle\psi|\,V_x\,|\psi\rangle$, $\langle\psi|\,V_y\,|\psi\rangle$ y $\langle\psi|\,V_z\,|\psi\rangle$ en el sistema original. Concluya que se cumple la definición del operador vectorial para $\mathbf{V}$. Use que las tres componentes del operador vectorial satisfacen:

$$[J_j, V_k] = i\epsilon_{jkl}V_l.$$

(b) Verifique que el operador de momento angular $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ es un operador vectorial.

(c) Muestre que el operador de rotación para un sistema de spin 1/2 se puede escribir como

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi) = \exp\left(-i\frac{\mathbf{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\phi}{\hbar}\right) = \cos\frac{\phi}{2}\mathbb{I} - i\mathrm{sen}\frac{\phi}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}),$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad. Reinteprete la esfera de Bloch.

$\boxed{6}$ Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, las matrices que representan a los operadores J^2, J_x, J_y, y J_z en el subespacio generado por la base $\{|1,1\rangle\,, |1,0\rangle\,, |1,-1\rangle\}$ de autoestados de J^2 y J_z. Verifique explícitamente (multiplicando las matrices) la relación $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$.

(a) Encuentre la base $\{|j, m_y\rangle\}$ de autoestados de J^2 y J_y de dicho subespacio. Escríbala como combinación lineal de los $|j, m\rangle$.

(b) Considere el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle)$. Si se mide J_x, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide J_y.

(c) Evalúe $J_z(J_z+\hbar)(J_z-\hbar)$ y $J_y(J_y+\hbar)(J_y-\hbar)$ sin usar la representación matricial.

(d) Muestre que en el caso de momento angular $j=1$, vale que

$$\mathcal{D}^{(j=1)}(\hat{\boldsymbol{y}},\beta) = \exp\left(-iJ_y\beta/\hbar\right) = \mathbb{I} - i\text{sen}\beta\left(\frac{J_y}{\hbar}\right) - (1-\cos\beta)\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2,$$

y obtenga su forma matricial en la base de autovalores de J_z.

$\boxed{7}$ Considere la secuencia de rotaciones de Euler representada por

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{D}(\hat{z},\alpha)\mathcal{D}(\hat{y},\beta)\mathcal{D}(\hat{z},\gamma).$$

(a) Muestre que para $j=1/2$, la matriz de 2 que representa esta rotación es

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\text{sen}\frac{\beta}{2} \\ e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\text{sen}\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}$$

(b) Debido a las propiedades del grupo de rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivaletnte a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

Momento angular orbital y momento de spin.

$\boxed{8}$ Muestre que el operador momento angular L_i en la representación de coordenadas viene dado por

$$\vec{L} = -i\hbar\left[\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{\theta}\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right].$$

Esto muestra que las componentes de momento angular actúan en $L^2(S^2)$ sin importar la dependencia radial de funciones de $L^2(\mathbb{R}^3)$.

$\boxed{9}$ Construya los armónicos esféricos $Y_{1,m} \in L^2(S^2)$. Para ello, resuelva primero $L_+Y_{1,1} = 0$ (L_+ en la representación de coordenadas) y aplique luego el operador L_- a $Y_{1,1}$ (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando los resultados del Ejercicio 6, escriba la combinación lineal de éstos que es autoestado de L_y con autovalor $\hbar$. Verifique su resultado aplicándole L_y en la representación de coordenadas.

$\boxed{10}$ Considere un autoestado de impulso angular ortibar $|l=2, m=0\rangle$. Suponga que este estado es rotado en un ángulo β alrededor del eje $\hat{y}$. Encuentre la probablidad de medir $m = 0, \pm1$ y ±2 en el nuevo estado.

$\boxed{11}$ La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:

$$\Psi(x) = (x + y + 3\,z)\,f(r)\,.$$

(a) ¿Es Ψ autofunción de L^2? Si es así, ¿cuál es el valor de l? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?

(b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?

(c) Suponga que se conoce de alguna manera que $\Psi(x)$ es una autofunción de energía con autovalor E. Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

12 Considere un sistema descripto por el Hamiltoniano

$$H = \frac{\omega_0}{\hbar} L^2 + \Omega L_y .$$

Suponga que el estado inicial del sistema es $|l = 1, m_z = 0\rangle$. Demuestre que existe un tiempo τ en que el estado evoluciona a $|l = 1, m_x = 0\rangle$ (a menos de una fase); donde m_z y m_x es el número cuántico correspondiente a L_z y L_x respectivamente.

13 Se tiene un electrón en un potencial dado por $V = \frac{1}{2} k X^2 + \gamma S_z$, donde S_z es la componente del espín en la dirección z. Hallar el espectro de energía y los valores de γ para los cuales hay degeneración.

14 Considere un estado arbitrario $|\alpha\rangle$ de un sistema de espín 1/2, sobre el que se aplica la rotación R

$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} S_z\,\varphi\right)|\alpha\rangle \ .$$

(a) Calcular el valor de expectación de S_x en el estado $|\alpha\rangle_R$ en función de los valores de expectación de S_x y S_y en el estado $|\alpha\rangle$.

(b) Muestre que si $\varphi = 2\pi$ se satisface

$$|\alpha\rangle_R = -\,|\alpha\rangle \ .$$

Observe que no se obtiene el mismo estado debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pag. 24.