Suma de momento angular

1 **1/2 + 1/2.** Considere dos partículas con espín 1/2.

(a) Escriba las matrices de 4×4 que corresponden a la representación de los operadores

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{S_2}, \quad S_z = S_{1z} + S_{2z},$$

en la base $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2; m_1, m_2\rangle\}$. Luego encuentre la matriz unitaria que diagonaliza estas matrices. ¿Qué son los coeficientes de cambio de base?

(b) Escribir los elementos de la base del producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada espín, que además son autoestados comunes de S^2 y S_z total (triplete y singlete)

$$\{|s = 1, m = 1\rangle\,, \quad |s = 1, m = -1\rangle\,, \quad |s = 1, m = 0\rangle\}\,, \quad \{|s = 0, m = 0\rangle\}\,,$$

en función de los kets en la representación $\{m_1, m_2\}$, usando los operadores $S_\pm$ y ortogonalidad.

(c) Verificar que el estado del singlete ($s = 0$) es antisimétrico ante el intercambio de partículas, mientras que los estados del triplete ($s = 1$) son simétricos.

(d) Evaluar cuáles de los estados del triplete y singlete son autoestados del operador de espín para cada partícula en alguna dirección y pensar qué sentido tiene en cada caso hablar de la alineación relativa entre los espines. ¿Qué diferencia a los estados $|s = 0, m = 0\rangle$ y $|s = 1, m = 0\rangle$?

2 **1/2 + 1.** Considere una partícula de espín 1/2 en un estado con $l = 1$.

(a) Encuentre el estado con j_{max} y $m_{j_{max}}$ en términos de los estados $|l, s, m_l, m_s\rangle$.

(b) Use $J_- = L_- + S_-$ para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.

(c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max} - 1, j_{max} - 1\rangle$.

(d) Use J_- para generar todos los estados $|j_{max} - 1, m\rangle$.

(e) ¿Cuál es el valor de expectación de L_z en el estado con $j = 1/2$ y $m = 1/2$? ¿Cuál es el valor de expectación de S_z en ese estado?

3 **1 + 1.** Considerar dos momentos angulares $\mathbf{J}_1$ y $\mathbf{J}_2$, con autovalores $\hbar^2 j_i(j_i + 1)$ de $\mathbf{J}_i^2$ con $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$. Encontrar los autoestados comunes a $(\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2$, $J_{1z} + J_{2z}$, $\mathbf{J}_1^2$ y $\mathbf{J}_2^2$. Verificar el resultado obtenido utilizando la tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan.

4 Una partícula A de espín 3/2, en un estado con momento angular nulo, se desintegra mediante una reacción

$$A \to B + C$$

que *conserva el momento angular total*, siendo B y C partículas de espín 1/2 y 0 respectivamente.

(a) ¿Qué valores puede tomar el momento angular orbital total del par de partículas B y C?

(b) ¿Cuáles son los autovalores de la proyección en el eje z del espín de la partícula A? Si se conoce que la partícula A se encontraba en un estado con máxima proyección de espín en el eje z antes de decaer, y luego de la reacción se encuentra que a la partícula B en el estado con mínima proyección de espín en el eje z, ¿cuál es el momento angular orbital total del par $B - C$?

(c) Para cada valor de la proyección de espín en z de la partícula A y todos los correspondientes valores de momento angular orbital total del par $B - C$, determinar la probabilidad de encontrar a la partícula B con proyección de espín z máxima en la dirección z.

5 **1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2.** Cierto sistema cuántico de cuatro partículas (distinguibles), todas de espín 1/2, tiene un hamiltoniano dado por

$$H_0 = -\gamma \left(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 + \bar{S}_2 \cdot \bar{S}_3 + \bar{S}_3 \cdot \bar{S}_4 + \bar{S}_4 \cdot \bar{S}_1\right)\,,$$

donde γ es una constante positiva y $\bar{S}_i$ es el operador espín de la partícula i-ésima ($i = 1, 2, 3, 4$).

(a) ¿Cuál es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema? Hallar los niveles de energía y su correspondiente degeneración (no es necesario escribir explícitamente los autoestados).

(b) Se realizan sobre el sistema mediciones de $\mathbf{S}^2$ y S_z (siendo $\mathbf{S}$ el operador espín total del sistema) y se obtienen los valores $2\hbar^2$ y $\hbar$ respectivamente. ¿Es esta información suficiente para determinar el estado del sistema luego de estas mediciones?

$\boxed{6}$ El acoplamiento spin-órbita es un efecto relativista que introduce, a bajas energías, una interacción efectiva entre el spin y el momento angular orbital de una partícula. De esta forma, incluyendo este acoplamiento, el Hamiltoniano del átomo de Hidrogeno sin campos externos es

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \quad \text{con } H_0 = \frac{P^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \text{ y } H_{\text{int}} = \frac{2\mu_B^2}{r^3}\frac{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}}{\hbar},$$

donde $\boldsymbol{S}$ es el operador de spin del electrón.

(a) Evalúe los conmutadores

$$[H, L^2], \quad [H, S^2], \quad [H, J^2], \quad [H, L_z], \quad [H, S_z], \quad [H, J_z]$$

donde $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$. ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores que conmutan mutuamente?

Ayuda: En coordenadas esféricas el operador P^2 se escribe como $P^2(\cdot) = -\hbar^2 \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\cdot)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\boldsymbol{L^2}(\cdot)$

(b) Considere ahora que se enciende un campo magnético externo $\mathbf{B} = B\hat{z}$, de modo que al Hamiltoniano se le agrega el término

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar}B(L_z + 2S_z).$$

Para este caso, repita el inciso (a).

$\boxed{7}$ Considere una partícula de spin 1/2 y masa m sometida a un potencial tipo oscilador armónico tridimensional isótropo

$$V(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

al que se le añade la interacción spin-orbita $\gamma\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$. El Hamiltoniano total está dado entonces por

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \gamma\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}.$$

(a) Halle exactamente las energía y autoestados de H correspondientes al nivel fundamental y al primer excitado.

(b) Si a $t = 0$ el sistema está en $|\phi\rangle = \left|n = 1, m_L = \hbar, m_S = \frac{\hbar}{2}\right\rangle$, halle $|\phi(t)\rangle$. Si a $t = 0$ se mide la energía, ¿qué resultado se obtiene? ¿Y si se mide L^2 o L_Z? ¿Qué ocurre si las mediciones se realizan a $t > 0$?

Teorema de Wigner-Eckart

$\boxed{8}$ Sean $\left\{T^{(k)}_{-k}, T^{(k)}_{-k+1}, \cdots, T^{(k)}_{k-1}, T^{(k)}_{k}\right\}$ $2k+1$ operadores. Decimos que $T^{(k)}_q$ son las componentes de un *tensor esférico irreducible* de rango k si ante rotaciones $T^{(k)_q}$ transforman de la forma

$$\mathcal{D}(R)T^{(k)}_q\mathcal{D}^\dagger(R) = \sum_{q'} \mathcal{D}^{(k)}_{q'q}T^{(k)}_{q'},$$

donde $\mathcal{D}^{(k)}_{q'q} = \langle k, q'|\,\mathcal{D}^{(k)}(R)\,|k, q\rangle$ son los elementos de matriz del operador de rotación en el subespacio de momento angular k. Se puede mostrar que esto es equivalente a pedir que

$$[J_z, T^{(k)}_q] = \hbar q T^{(k)}_q, \quad [J_\pm, T^{(k)}_q] = \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)}\,T^{(k)}_{q\pm 1}.$$

(a) Verifique que si $\mathbf{V} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z}$ es un operador vectorial, entonces los operadores $V_q^{(1)}$ dados por

$$V_{\pm 1}^{(1)} := \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \quad V_0 := V_z,$$

definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(b) Sea $\mathbf{V}$ un operador vectorial. Considere los armónicos esféricos $Y_{l=1}^m(\mathbf{r})$ en coordenadas cartesianas y sean $V_q^{(1)}$, $q = -1, 0, 1$, operadores definidos de la forma

$$V_q^{(1)} = rY_1^q(V_x, V_y, V_z).$$

Verifique entonces que los operadores $V_q^{(1)}$ definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(c) Suponiendo que las componentes de $\mathbf{V}$ conmutan entre sí y haciendo uso del hecho que los armónicos esféricos ante una rotación R transforman de la forma

$$Y_l^m \to \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(l)}(R) Y_l^{m'},$$

discuta por qué la sustitución $V_q^{(k)} = r^k Y_k^q(V_x, V_y, V_z)$ en los armónicos esféricos escritos en coordenadas cartesianas nos define un tensor esférico irreducible de rango k.

$\boxed{9}$ Sean $V^{(k_1)}$ y $W^{(k_2)}$ dos tensores esféricos irreducibles de rango k_1 y k_2 respectivamente. La idea de este ejercicio es mostrar que el producto de dos tensores irreducibles no es, necesariamente, un tensor irreducible.

(a) Muestre entonces que los operadores $T_q^{(k)}$, dados por

$$T_q^{(k)} = \sum_{q1,q2} V_{q_1}^{(k_1)} W_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1, k_2; q_1, q_2 | k, q \rangle,$$

definen un tensor irreducible de rango k.

(b) Invierta la expresión anterior utilizando la relación de completitud de los coeficientes de Clebsh-Gordan y concluya que $V_i W_j$ (producto de las componentes i-ésimo y j-ésima de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ resp.) se puede escribir como la suma de un escalar (rango 0), otro vector (rango 1) y un tensor esférico de rango 2.

(c) Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ dos operadores vectoriales. Construya, utilizando el inciso (a), tensores esféricos irreducibles de rango 0, rango 1 y rango 2 expresados en términos de los productos de sus componentes cartesianas. En particular si $\mathbf{V} = \mathbf{W} = \mathbf{R}$ es el operador posición, muestre que el tensor de rango 2 que se obtiene es, a menos de un factor, el operador de momento cuadrupolar eléctrico.

$\boxed{10}$ Considere una partícula sin spin ligada a un centro fijo mediante un potencial central. Estudie los elementros de matriz

$$\langle n', l', m' | \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy) | n, l, m \rangle, \quad \langle n', l', m' | z | n, l, m \rangle$$

utilizando únicamente el teorema de Wigner-Eckart. En particular, trate de relacionar los distintos elementos de matriz entre sí y establezca cuáles de ellos pueden ser no nulos.

$\boxed{11}$ El tensor cuadrupolar eléctrico de una partícula de carga q se define como

$$Q_{ij} := q(3x_i x_j - \delta_{ij} r^2).$$

Suponga que se conoce el valor de expectación de la componente zz del momento cuadrupolar en el autoestado de momento angular $|\alpha, j, m = j\rangle$ (donde α es un índice asociado a la dependencia radial del estado; recordar que L^2 y L_z no forman un CCOC). Notemos con Q a este valor de expectación, es decir que

$$Q := \langle \alpha, j, m = j | Q_{zz} | \alpha, j, m = j \rangle = \langle \alpha, j, m = j | q(3z^2 - r^2) | \alpha, j, m = j \rangle$$

(a) Calcule los elementos de matriz

$$\left\langle \alpha, j, m' \right| q(x^2 - y^2) \left| \alpha, j, m = j \right\rangle , \quad m' = -j, -j+1, \cdots , j-1, j.$$

en función de Q y de los coeficientes de Clebsh-Gordan. Para ellos,

I- Escriba xy, xz y $x^2 - y^2$ como componentes de un tensor esférico irreducible de rango 2.

II- Evalúe los elementos de matriz buscados utilizando el teorema de Wigner-Eckart.

(b) Evalúe los valores de expectación de todas las componentes del tensor cuadrupolar sobre los estados $|\alpha, j, m = j\rangle$, es decir, calcule

$$\langle \alpha, j, m = j | \, Q_{ik} \, | \alpha, j, m = j \rangle ,$$

en función del valor de expectación Q. Interprete el resultado.

(c) Probar que para un núcleo atómico de spin 0 o 1/2 los valores de expectación del momento cuadrupolar eléctrico son nulos (el spin de un núcleo es el momento angular resultante de los spines y momentos angulares relativos de los nucleones constituyentes).