1 **Teorema de Wigner**
Considerar una transformación que lleva estados físicos $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ a $|\phi'\rangle$ y $|\psi'\rangle$, y es tal que resulta

$$|\langle\psi'|\phi'\rangle| = |\langle\psi|\phi\rangle|\,,$$

para todo ψ y ϕ en el espacio de Hilbert. El teorema de Wigner nos dice que dicha transformación puede representarse actuando sobre el espacio de Hilbert por medio de un operador que es unitario o antiunitario.

(a) Dar ejemplos de operadores que cumplan la hipótesis del teorema de Wigner y que sean unitarios.

(b) Para ver una situación en la que aparecen operadores antiunitarios en este contexto pueden revisar por ejemplo la sección 13.3 del libro de Ballentine sobre el operador de inversión temporal.

2 **Simetrías.** Decimos que una transformación U es una simetría de un sistema si deja invariante el módulo del producto interno entre dos vectores cualesquiera y además deja invariante al Hamiltoniano del sistema H (es decir, cumple $UHU^{-1} = H$). Demostrar que:

(a) $e^{-ip\cdot d/\hbar}$, siendo d una constante real, es una simetría de la partícula libre unidimensional.

(b) $e^{-i\epsilon H/\hbar}$, siendo ϵ una constante real, es una simetría de cualquier sistema cuyo hamiltoniano H no dependa explícitamente del tiempo.

3 **Generador infinitesimal de una simetría continua.** Sea $U(s) = e^{isK}$, con K hermítico y s real, un operador que es simetría de cierto sistema físico de hamiltoniano H independiente del tiempo para todo s.

(a) Probar que $[H, K] = 0$. K se conoce como el generador infinitesimal de la simetría.

(b) Demostrar que el valor de expectación de K se conserva en el tiempo. Se dice que K es entonces una constante de movimiento.

(c) Probar que el momento lineal es la constante de movimiento asociada a la invariancia ante traslaciones arbitrarias.

(d) Probar que la componente del momento angular en una dirección es la constante de movimiento asociada a la invariancia ante rotaciones arbitrarias alrededor de dicha dirección.

4 **Simetrías y degeneración**
Sea G el generador infinitesimal de una simetría de cierto sistema con hamiltoniano H. Demostrar que si $|\psi\rangle$ es un autoestado de H con energía E, entonces $f(G)|\psi\rangle$ (siendo f una función analítica) también es autoestado de H y tiene la misma energía E. Como en general será $f(G)|\psi\rangle \neq |\psi\rangle$, la existencia de simetrías suele generar un aumento en la degeneración de los niveles de energía.

5 **Degeneración en el átomo de Hidrógeno**
El hamiltoniano del átomo de Hidrógeno está dado por

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}\,.$$

(a) Mostrar que el momento angular y el vector de Runge-Lenza

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{y} \quad \mathbf{R} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{p}) - \frac{e^2\mathbf{r}}{r},$$

respectivamente, son generadores de simetría del sistema.

(b) Mostrar que $\mathbf{L} \cdot \mathbf{R} = 0$ y $\mathbf{R}^2 = \frac{2}{m}H(\mathbf{L}^2 + \hbar^2) + e^4$.

(c) Obtener el espectro de energía. Para una energía $E < 0$, mostrar que $\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \sqrt{-\frac{m}{2E}}\mathbf{R})$ e $\mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \sqrt{-\frac{m}{2E}}\mathbf{R})$ generan dos simetrías de “rotación” y a partir de ellas obtener el valor de E.

Para más detalle seguir el desarrollo de la sección *SO(4) symmetry in the Coulomb potencial* del capítulo 4 de *Modern Quantum Mechanics* de Sakurai-Napolitano; o la sección *Dynamical Symmetry* del capítulo 7 de *Quantum Mechanics* de Schiff.

Inversión temporal

6 Sea $\phi(x,t)$ solución a ecuación de Schrodinger para una partícula sin spin sobre la cual actúa una potencial real V.

(a) Muestre que $\phi(x,-t)$ no es solución, mientras que $\phi^*(x,-t)$ sí lo es. Vea el caso de la partícula libre.

(b) Si además el hamiltoniano es invariante ante inversión temporal, pruebe que $\phi(x,t)$ puede ser elegida real en cada instante de tiempo.

7 Sea $\phi(p) = \langle p|\alpha\rangle$ la función de onda en representación de momentos del estado $|\alpha\rangle$. La función de onda en representación de momentos del estado $\Theta\,|\alpha\rangle$ (donde Θ es el operador de inversión temporal), ¿está dado por $\phi(p)$, $\phi(-p)$, $\phi^*(p)$ o por $\phi^*(-p)$? Justifique.

8 Considere una rotación R (en tres dimensiones):

(a) Determine como actúa el operador de inversión temporal sobre el estado $\mathcal{D}(R)\,|j,m\rangle$.

(b) Usando las propiedades de inversión temporal y rotaciones, pruebe que

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m,m'}(R) = (-1)^{m-m'}\mathcal{D}^{(j)}_{-m,-m'}(R).$$

(c) Pruebe que $\Theta\,|j,m\rangle = i^{2m}\,|j,-m\rangle$.

9 Suponga que una partícula sin spin está ligada a un centro fijo por un potencial V tan asimétrico que ningún nivel de energía está degenerado. Usando invariancia ante inversión temporal, pruebe que

$$\langle \mathbf{L}\rangle = 0$$

para cualquier autoestado de energía. Si la función de onda de uno de estos autoestados no degenerados se expande en la forma

$$\sum_{l,m} F_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

¿qué tipo de restricciones de fase se obtienen para $F_{lm}(r)$?

Traslación e inversión espacial.

10 **Teorema de Bloch**

Un cristal tiene invariancia ante traslaciones en un vector de la forma $\mathbf{R}_n = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$, con n_i entero. Esto significa que el hamiltoniano H del cristal es invariante ante traslaciones en el vector R_n, es decir $[H, U(\mathbf{R}_n)] = 0$, siendo $U(\mathbf{R}_n) = \exp(-ip\cdot\mathbf{R}_n/\hbar)$.

(a) Demostrar que los autovalores de $U(\mathbf{R}_n)$ tienen la forma $c(\mathbf{R}_n) = \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n)$, siendo $\mathbf{k}$ un vector de componentes reales.

(b) Como H y $U(\mathbf{R}_n)$ conmutan, tienen una base común de autofunciones $\Psi(\mathbf{r})$. Demostrar que dichas autofunciones satisfacen

$$\Psi(\mathbf{r}-\mathbf{R}_n) = \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n)\,\Psi(\mathbf{r})\ .$$

(c) Expandir las autofunciones del inciso anterior en ondas planas y demostrar que la distribución de momentos asociada es discreta.

$\boxed{11}$ Considere dos autoestados del operador paridad

$$\Pi\,|\alpha\rangle = \epsilon_\alpha\,|\alpha\rangle \qquad \Pi\,|\beta\rangle = \epsilon_\beta\,|\beta\rangle \ ,$$

donde los autovalores ϵ_α y ϵ_β pueden ser 1 o -1. Muestre que

$$\langle\beta|\mathbf{x}|\alpha\rangle = 0$$

salvo si $\epsilon_\alpha = -\epsilon_\beta$. Relacione este resultado con el argumento usual $\int \phi_\beta^* \mathbf{x} \phi_\alpha \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0$ si ϕ_α y ϕ_β tienen la misma paridad. ¿Qué ocurre con $\langle\beta|\mathbf{p}|\alpha\rangle$? ¿Y con $\langle\beta|\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}|\alpha\rangle$?

$\boxed{12}$ Sea una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico cuyo estado inicial a $t = 0$ es el estado coherente

$$|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{n=0} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \ ,$$

donde $\beta \in \mathbb{C}$.

(a) Se mide el operador paridad Π a $t = 0$ obteniéndose el autovalor $+1$. ¿Cuál es el estado $|\psi\rangle$ del sistema a tiempo $t > 0$?

(b) ¿Qué valores puede tomar a $t > 0$ el operador H y con qué probabilidad? ¿Cuál es el estado a un tiempo posterior? ¿Cuál es el primer estado excitado? ¿Qué resultados posibles daría la medición de Π?