

Perturbaciones independientes del tiempo

- 1 El Hamiltoniano de cierto sistema de dos niveles puede escribirse como

$$H = \begin{pmatrix} E_1^0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_2^0 \end{pmatrix}.$$

Claramente los autovectores del Hamiltoniano no perturbado ($\lambda = 0$), en su forma vectorial, son

$$|E_1\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |E_2\rangle^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Resuelva este problema exactamente, encuentre los autovectores y autovalores de la energía.
- (b) Asumiendo que $\lambda|\Delta| \ll |E_1^0 - E_2^0|$, resuelva el mismo problema usando la teoría de perturbaciones. Halle la corrección de primer orden en los autovectores y de segundo orden en los niveles de energía. Compare los resultados con los obtenidos en (a).
- (c) Suponga ahora que los niveles de energía no perturbados están casi degenerados ($|E_1^0 - E_2^0| \ll \lambda|\Delta|$). Muestre que los resultados obtenidos en (a) se parecen mucho a los que obtendría al aplicar la teoría de perturbaciones para el caso degenerado ($E_1^0 = E_2^0$).
- 2 Un pozo cuántico es un pozo de potencial que confina a partículas a moverse en dos dimensiones. Tales pozos pueden construirse con multicapas de semiconductores. El confinamiento en las dos direcciones restantes puede diseñarse con bastante libertad para conseguir distintas estructuras de niveles energéticos. Este tipo de técnicas se utiliza para hacer LEDs y diodos láser de distintos colores. Para este sistema bidimensional, consideremos una partícula de masa m bajo la acción del potencial

$$V = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- (a) Resuelva el problema de autofunciones y energías de este Hamiltoniano de forma exacta. En particular, recuerde que este sistema es separable en las coordenadas x e y , y que los niveles de energía están dados por

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2), \quad \text{con } n_x, n_y \in \mathbb{N}.$$

¿Qué energía tienen el estado fundamental y el primer excitado? ¿Hay degeneración?

Ahora suponga que agregamos una perturbación independiente del tiempo de la forma

$$V_1 = \begin{cases} \lambda xy & \text{para } 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

- (b) Escriba la expresión de la energía del estado fundamental a segundo orden y la correspondiente autofunción a primer orden en λ . Simplifique lo más posible las expresiones utilizando argumentos de simetría (pero no calcule explícitamente las integrales ni las sumatorias).
- (c) Calcule la energía del primer excitado a primer orden y la correspondiente autofunción a orden cero en λ (puede usar que $\langle 12 | V_1 | 12 \rangle = \lambda \frac{16L}{9\pi^2}$).
- 3 Considere un oscilador armónico isótropo en dos dimensiones. El hamiltoniano está dado por

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2).$$

- (a) ¿Cuáles son las energías de los tres estados de menor energía? ¿Hay degeneración?

- (b) Ahora se aplica la perturbación $V = \delta m \omega^2 xy$, donde δ es un número real adimensional mucho menor que uno. Encuentre el autoestado de energía a cero orden y la correspondiente autoenergía a primer orden [es decir, la energía no perturbada de (a) más el corrimiento de energía a primer orden] para cada uno de los tres estados de menor energía.
- (c) Resuelva exactamente $H_0 + V$. Compare con los resultados perturbativos hallados en (b). Puede usar que

$$\langle n' | x | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n+1} \delta_{n',n+1} + \sqrt{n} \delta_{n',n-1}) .$$

4 Considere una partícula de carga q en presencia de un potencial $V(r) = m\omega^2 r^2/2$ y de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Defina $\omega_L = -qB/(2m)$ y elija el gauge $\mathbf{A} = -\mathbf{r} \times \mathbf{B}/2$.

- (a) Muestre que al hamiltoniano se le suma un operador lineal en ω_L (término paramagnético) y uno cuadrático en ω_L (término diamagnético). Halle los niveles de energía en forma exacta y su degeneración (ayuda: es conveniente definir $a_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \pm ia_y)$, donde a_x, a_y son los operadores de destrucción asociados a los modos en x e y).
- (b) Muestre que para campos pequeños ($\omega_L \ll \omega$), el efecto del término diamagnético es despreciable respecto del paramagnético.
- (c) Considere el primer nivel excitado del oscilador, o sea aquel cuya energía tiende a $5\hbar\omega/2$ cuando $\omega_L \rightarrow 0$. Estudie a primer orden en ω_L/ω como se desdobra por la presencia de \mathbf{B} (**efecto Zeeman**). Repita el cálculo para el segundo nivel excitado.
- (d) Evalúe el efecto diamagnético para el estado fundamental, es decir, como varía su energía con ω_L . En presencia del campo \mathbf{B} , ¿sigue siendo autoestado de L^2 ? ¿Y de L_z ? Muestre que el efecto de \mathbf{B} consiste en comprimir la función de onda en \hat{z} y en inducir una corriente.

5 Estructura fina del átomo de Hidrógeno

La estructura fina se genera teniendo en cuenta correcciones relativistas al hamiltoniano del átomo de Hidrógeno. La estructura del hamiltoniano en este caso es de la forma

$$H = mc^2 + H_0 + W_{mv} + W_{SO} + W_D ,$$

donde:

- mc^2 es la energía en reposo del electrón (una constante que no nos interesará).
- $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$ el hamiltoniano no relativista que estudiamos en el ejercicio anterior.
- $W_{mv} = -\frac{p^4}{8m^3c^2}$ un término que corrige la energía cinética teniendo en cuenta la variación de la masa del electrón con la velocidad.
- $W_{SO} = \frac{e^2}{m^2c^2} \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{r^3}$ tiene en cuenta la interacción que surge entre el campo magnético generado por el electrón y su propio espín. Como el campo magnético generado por el electrón está asociado a su velocidad, y por ende a su momento angular orbital, este término se conoce como acoplamiento espín-órbita.
- $W_D = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2 c^2} \delta(\mathbf{r})$ es el término de interacción de Darwin, que corrige el potencial del núcleo al promediar la interacción electrostática núcleo-electrón en las oscilaciones rápidas del electrón. Este término afecta sólo a los orbitales s , lo que se manifiesta en la presencia de $\delta^3(\mathbf{r})$.

W_{mv} , W_{SO} y W_D se conocen como los *términos de estructura fina*.

- (a) Demostrar que las correcciones a la energía de los términos de estructura fina es aproximadamente 10^4 veces más pequeña que la dada por el término H_0 .
- (b) ¿Qué efecto tienen los términos de estructura fina sobre el nivel $n = 1$?

- (c) Estudiar la estructura fina del nivel $n = 2$ (en particular, ver cómo se rompe la degeneración del nivel). Pueden seguir por ejemplo la sección XII-C, p. 1219, del tomo 2 del libro de Cohen-Tannoudji.

6 Efecto Stark en el átomo de Hidrógeno. Considere un átomo de hidrogeno en presencia de un campo electrostático uniforme $\mathbf{E} = E_0\hat{z}$, con E_0 consante y lo suficientemente intenso como para despreciar los efectos de estructura fina, pero lo suficientemente débil respecto al Hamiltoniano del átomo de hidrógeno como para ser tratado perturbativamente. De esta forma, consideremos el potencial perturbativo

$$V = -eE_0z$$

donde e es la carga del electrón y por lo tanto $-e = |e|$.

- (a) Mostrar que al orden más bajo no nulo, la energía del estado fundamental disminuye de forma proporcional a E_0^2 (*efecto Stark cuadrático*).
- (b) Utilizando el estado fundamental perturbado a primer orden, muestre que se induce un momento dipolar cuyo valor medio es proporcional a E_0 (el momento dipolar \mathbf{p} entre dos cargas q y $-q$ se define como $\mathbf{p} := q(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{-q})$). Muestre que el mismo resultado se obtiene derivando la energía encontrada en el ítem (a) respecto a las componentes del campo.
- (c) Considere ahora el primer excitado, es decir el subespacio $2s$ y $2p$. Determine si a primer orden se rompe la degeneración y en los casos afirmativos, muestre que la corrección en energía es proporcional a E_0 (*efecto Stark lineal*) y calcule los correspondientes autoestados a orden cero (puede tomar como conocida la integral radial $\langle 2s | r | 2p \rangle = 3\sqrt{3}a_0$, con a_0 el radio de Bohr)

Perturbaciones dependientes del tiempo

7 Considere el oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω_0 , que a $t < 0$ está en el estado fundamental. A $t = 0$ se enciende una perturbación

$$V(t) = F_0 x \text{sen} \omega t ,$$

- (a) Usando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, obtenga a primer orden la probabilidad de encontrar el oscilador en el estado $|n\rangle$ a tiempo $t > 0$. ¿Qué transiciones son posibles? ¿Qué condición debe satisfacer F_0 para que el desarrollo perturbativo sea consistente?
- (b) Obtenga una expresión para el valor de expectación $\langle x \rangle$ como función del tiempo usando la teoría de perturbaciones al orden más bajo no nulo.
- (c) ¿Qué sucede en el caso de resonancia $\omega = \omega_0$?

Ayuda:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t e^{i\omega_1 t'} \text{sen} \omega_2 t' \right| &= \left| \frac{\text{sen}(\omega_1 - \omega_2)t/2}{(\omega_1 - \omega_2)} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t/2} - \frac{\text{sen}(\omega_1 + \omega_2)t/2}{(\omega_1 + \omega_2)} e^{i(\omega_1 + \omega_2)t/2} \right| \\ &= \frac{\text{sen}^2(\omega_1 - \omega_2)t/2}{(\omega_1 - \omega_2)^2} + \frac{\text{sen}^2(\omega_1 + \omega_2)t/2}{(\omega_1 + \omega_2)^2} - 2 \frac{\text{sen}(\omega_1 - \omega_2)t/2 \text{sen}(\omega_1 + \omega_2)t/2 \cos \omega_2 t}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2)} \end{aligned}$$

8 Un oscilador armónico unidimensional está en el estado fundamental para $t < 0$. A tiempos positivos se lo somete a una fuerza dependiente del tiempo pero espacialmente uniforme en la dirección x dada por

$$F(t) = F_0 e^{-t/\tau} \quad \text{con } F_0, \tau \in \mathbb{R}.$$

- (a) Usando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, obtenga la probabilidad de encontrar el oscilador en el estado $|n\rangle$ ($n > 0$) a primer orden a tiempo $t \rightarrow \infty$.
- (b) ¿Qué condición puede imponer sobre τ para garantizar la validez del desarrollo perturbativo del ítem anterior?

Ayuda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} e^{-t'^2/\tau^2} = \sqrt{\pi}\tau e^{-\tau^2\omega^2/4}.$$

9 El hamiltoniano de un sistema de dos niveles

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1^0 & 0 \\ 0 & E_2^0 \end{pmatrix}$$

es perturbado por el potencial

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \cos \omega t \\ \lambda \cos \omega t & 0 \end{pmatrix},$$

donde λ es real.

(a) A $t = 0$ el sistema está en el estado

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo y asumiendo que $E_1^0 - E_2^0$ no es cercano a $\pm\hbar\omega$, derive una expresión para la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para tiempos positivos.

(b) ¿Por qué este procedimiento no es válido cuando $E_1^0 - E_2^0 \approx \pm\hbar\omega$?

10 Considere un sistema de dos niveles con $E_1 < E_2$ y un potencial dependiente del tiempo que conecta los dos niveles

$$V_{11} = V_{22} = 0, \quad V_{12} = V_{21}^* = \gamma e^{i\omega t},$$

donde γ es real. A $t = 0$ se sabe que solo el nivel mas bajo está poblado, es decir que $c_1(0) = 1$, y $c_2(0) = 0$.

(a) Encuentre $|c_1(t)|^2$ y $|c_2(t)|^2$ para $t > 0$ en forma exacta resolviendo la ecuación diferencial

$$i\hbar \frac{dc_k}{dt} = \sum_{n=1}^2 V_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t} c_n, \quad k = 1, 2.$$

(b) Resuelva el mismo problema usando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo al orden mas bajo no nulo. Compare con el resultado hallado en (a) para pequeños valores de γ . Trate por separado los siguientes casos: (i) ω muy diferente de ω_{12} , y (ii) $\omega \approx \omega_{12}$.