En lo que sigue se tratará de dar una idea poco formal de como calcular los tensores esféricos generados por un vector cartesiano y calcular los primeros ordenes del generado por dos tensores esféricos de ordenes distintos usando un teorema visto en clase y la tabla de los coeficientes de Clebsch-Gordan.

En la representación de la posición, los operadores $L_{\pm}$ y L_z son:

$$L_{\pm} = -i\hbar e^{\pm i\phi}[\pm i\frac{\partial}{\partial\theta} - cotg(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi}] \tag{1}$$

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{2}$$

Sabemos que $\langle \hat{n}|l,-l\rangle = Y_{-l}^{(l)}(\theta,\phi)$ es autoestado de L_z con autovalor $-l$ y se debe anular en L_-. Entonces, por separación de variables es $Y_{-l}^{(l)}(\theta,\phi) = e^{-il\phi}f(\theta)$. De modo que de la ecuación (1) se obtiene

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = l\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}f(\theta)$$

$$\frac{df(\theta)}{f(\theta)} = \frac{d(ln(\sin^l(\theta))}{d\theta}d\theta$$

Entonces

$$Y_{-l}^{(l)}(\theta,\phi) = Ne^{-il\phi}sin^l(\theta) = N[e^{-i\phi}\sin\theta]^l = N[\cos(\phi)\sin(\theta) - i\sin(\phi)\sin(\theta)]^l$$

$$Y_{-l}^{(l)}(\theta,\phi) = N\Big(\frac{x-iy}{r}\Big)^l$$

donde N es una constante de normalización que en principio depende de l.

A partir de esto construimos $T_{-l}^{(l)} = A_l(x-iy)^l$ el tensor esférico de rango (l) y proyección o índice $-l$ con A_l un parámetro a determinar. Y de igual manera que con los armónicos esféricos estos tensores cumplen

$$L_{\pm}T_m^{(l)} = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}T_{m\pm 1}^{(l)}$$

$$T_{-m}^{(l)} = (-1)^m T_m^{(l)*}$$

Ya que ahora tenemos el tensor de rango (l) del cual podemos generar todos los demás conviene escribir L_+ en coordenadas cartesianas

$$L_+ = L_x + iL_y = -i\hbar\Big[y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} + iz\frac{\partial}{\partial x} - ix\frac{\partial}{\partial z}\Big] = \hbar\Big[z\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big) - \Big(x+iy\Big)\frac{\partial}{\partial z}\Big] \tag{3}$$

Calculemos los tensores con $l = 1$.

En este caso, $T_{-1}^{(1)} = A_1(x-iy)$. Aplicando (3)

$$L_+ T_{-1}^{(1)} = \hbar\sqrt{2}T_0^{(1)} = 2\hbar A_1 z$$

$$L_+ T_0^{(1)} = \hbar\sqrt{2}T_1^{(1)} = -\hbar\sqrt{2}A_1(x+iy)$$

Entonces $T_{-1}^{(1)} = A_1(x-iy)$, $T_0^{(1)} = \sqrt{2}A_1 z$ y $T_1^{(1)} = -A_1(x+iy)$. Ahora pido la condición de que $T_0^{(1)} = z$, por lo que debe ser $A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

De esta manera quedan $T_1^{(1)} = -\frac{x+iy}{\sqrt{2}}$, $T_0^{(1)} = z$ y $T_{-1}^{(1)} = \frac{x-iy}{\sqrt{2}}$

De esto podemos despejar $x = \frac{T_{-1}^{(1)} - T_1^{(1)}}{\sqrt{2}}$, $y = i\frac{T_{-1}^{(1)} + T_1^{(1)}}{\sqrt{2}}$ y $z = T_0^{(1)}$

Así como un vector $\mathbf{V}$ se escribe en la base cartesiana como (x, y, z), el mismo vector es $\left(T_1^{(1)}, T_0^{(1)}, T_{-1}^{(1)}\right)$ en lo que se llama la *base esférica*, de la cual empezaremos a construir tensores de orden (l) mayores.

Para poder construir estos tensores voy a usar un teorema que vimos en clase. El teorema dice que el tensor de orden (k) y de índice m generado por dos tensores $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Z}$ de ordenes j_1, j_2 respectivamente se obtiene como

$$T_m^{(j)} = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; j, m \right\rangle X_{m_1}^{(j_1)} Z_{m_2}^{(j_2)} \tag{4}$$

Donde $\langle j_1, j_2; m_1, m_2 |\ j_1, j_2; j, m\rangle$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan.

Para entender como se obtienen estos coeficiente de la tabla se puede ver la figura 1

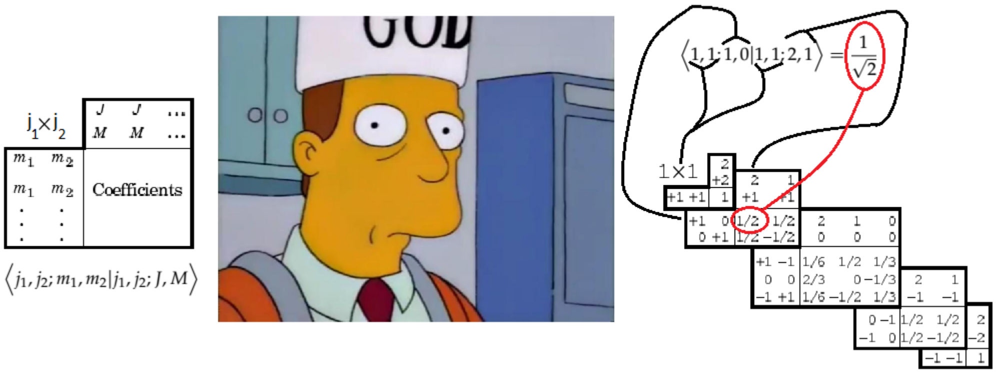

Figure 1: Pero señor McClure ¿Cómo se lee la tabla de Clebsch-Gordan?

Debemos entender que, por suma de momento angular, $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ y $-j \leq m \leq j$. Esto nos permitirá encontrar la forma de A_l.

Por inspección en la tabla podemos ver que

$$\left\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; j_1 + j_2, -(j_1 + j_2) \right\rangle = \delta_{m1,-j1}\delta_{m2,-j2}$$

Entonces si tomamos $\mathbf{X} = T_{m_1}^{(n)}$, $\mathbf{Z} = T_{m_2}^{(1)}$, en la suma de (4) solo queda los términos con $m_1 = n$ y $m_2 = 1$:

$$T^{(n+1)}_{-n-1} = A_{n+1}(x-iy)^{n+1} = A_n(x-iy)^n A_1(x-iy) = A_n \frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy)^{n+1}$$

Queda evidente la recurrencia $A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_n$. Entonces tenemos que $A_l = (\frac{1}{2})^{l/2}$.

De modo que se definen los tensores $T^{(l)}_{-l} = \left(\frac{x-iy}{\sqrt{2}}\right)^l$ y $T^{(l)}_m \sim L^{(m+l)}_+ T^{(l)}_{-l}$ como los tensores de ordenes mayores a 1 de un vector $\mathbf{V} = (x, y, z)$ en la base cartesiana.

Calculando los tensores de orden (2) usando este método obtenemos

$$\begin{array}{lll}
T^{(2)}_2 = \left(\frac{x+iy}{\sqrt{2}}\right)^2 & & \\
T^{(2)}_1 = -z(x+iy) & T^{(1)}_1 = 0 & \\
T^{(2)}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(3z^2 - x^2 - y^2 - z^2) & T^{(1)}_0 = 0 & T^{(0)}_0 = -\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{3}} \\
T^{(2)}_{-1} = z(x-iy) & T^{(1)}_{-1} = 0 & \\
T^{(2)}_{-2} = \left(\frac{x-iy}{\sqrt{2}}\right)^2 & &
\end{array}$$

De estas relaciones podemos despejar cualquier monomio de grado 2 con variables x y z.

$$xy = \frac{T^{(2)}_2 - T^{(2)}_{-2}}{2i} \quad xz = \frac{T^{(2)}_{-1} - T^{(2)}_1}{2} \quad yz = -\frac{T^{(2)}_1 + T^{(2)}_{-1}}{2i}$$

$$x^2 = \frac{T^{(2)}_2 + T^{(2)}_{-2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(T^{(2)}_0 + \sqrt{2}T^{(0)}_0) \quad y^2 = -\frac{T^{(2)}_2 + T^{(2)}_{-2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(T^{(2)}_0 + \sqrt{2}T^{(0)}_0)$$

$$z^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}T^{(2)}_0 - T^{(0)}_0)$$