Ejercicio 5: Degeneración en el átomo de Hidrógeno
El hamiltoniano del átomo de Hidrógeno está dado por

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}\,.$$

(a) Mostrar que el momento angular y el vector de Runge-Lenza

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} \quad \text{y} \quad \mathbf{R} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p}) - \frac{e^2\mathbf{r}}{r},$$

respectivamente, son generadores de simetría del sistema.

(b) Mostrar que $\mathbf{L}\cdot\mathbf{R} = 0$ y $\mathbf{R}^2 = \frac{2}{m}H(\mathbf{L}^2 + \hbar^2) + e^4$.

(c) Obtener el espectro de energía. Para una energía $E < 0$, mostrar que $\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \sqrt{-\frac{m}{2E}}\mathbf{R})$ e $\mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \sqrt{-\frac{m}{2E}}\mathbf{R})$ generan dos simetrías de "rotación" y a partir de ellas obtener el valor de E.

Para más detalle seguir el desarrollo de la sección *SO(4) symmetry in the Coulomb potencial* del capítulo 4 de *Modern Quantum Mechanics* de Sakurai-Napolitano; o la sección *Dynamical Symmetry* del capítulo 7 de *Quantum Mechanics* de Schiff.

Solución:
La intención de este apunte no solo es resolver de manera completa este ejercicio sino también dejar en claro algunas cosas respecto a operadores vectoriales.

En todo lo que se sigue hay que tener en cuenta las siguientes propiedades del tensor de Levi-Civita ϵ_{ijk} y la delta de Kronecker δ_{ij}:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} &= \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} &= 2\delta_{km} \\
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 2\delta_{ii} = 6
\end{aligned} \tag{1}$$

Donde, de manera general, $\delta_{ii} = d$ la dimensión del espacio. Como nos interesa estudiar las rotaciones en el espacio real debe ser $d = 3$. En este sentido recordemos que en el espacio real, los generadores de rotación son las componentes del momento angular orbital

$$L_i = (\mathbf{r}\times\mathbf{p})_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k.$$

Veamos que efectivamente cumplen el álgebra de momento angular ($su(2)$). La cuenta hecha con detalle es la siguiente:

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= [\epsilon_{ilm}x_l p_m, \epsilon_{jrs}x_r p_s] \\
&= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}[x_l p_m, x_r p_s] \\
&= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\left([x_l, x_r p_s]p_m + x_l[p_m, x_r p_s]\right) \\
&= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\left([x_l, x_r p_s]p_m + x_l[p_m, x_r p_s]\right) \\
&= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\left(x_r[x_l, p_s]p_m + [x_l, x_r]p_s p_m + x_l x_r[p_m, p_s] + x_l[p_m, x_r]p_s\right) \\
&= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\left(x_r[x_l, p_s]p_m + x_l[p_m, x_r]p_s\right) \\
&= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\left(i\hbar\delta_{ls}x_r p_m - i\hbar\delta_{mr}x_l p_s\right) \\
&= i\hbar\epsilon_{ism}\epsilon_{jrs}x_r p_m - i\hbar\epsilon_{ilm}\epsilon_{jms}x_l p_s \\
&= i\hbar\epsilon_{smi}\epsilon_{sjr}x_r p_m - i\hbar\epsilon_{mil}\epsilon_{msj}x_l p_s \\
&= i\hbar(\delta_{mj}\delta_{ir} - \delta_{ij}\delta_{rm})x_r p_m - i\hbar(\delta_{is}\delta_{lj} - \delta_{ij}\delta_{ls})x_l p_s \\
&= i\hbar\delta_{mj}\delta_{ir}x_r p_m - i\hbar\delta_{ij}x_k p_k - i\hbar\delta_{is}\delta_{lj}x_l p_s + i\hbar\delta_{ij}x_k p_k \\
&= i\hbar\delta_{mj}\delta_{ir}x_r p_m - i\hbar\delta_{is}\delta_{lj}x_l p_s \\
&= i\hbar\delta_{ir}\delta_{jm}x_r p_m - i\hbar\delta_{im}\delta_{jr}x_r p_m \\
&= i\hbar(\delta_{ir}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jr})x_r p_m \\
&= i\hbar\epsilon_{ijk}\epsilon_{krm}x_r p_m \\
[L_i, L_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}L_k.
\end{aligned} \tag{2}$$

Hay que seguir con cuidados cada paso; y tener en cuenta que todas las coordenadas de posición y momento conmutan entre sí y que $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Además de usar con cuidado las propiedades del conmutador y, sobre todo en los últimos pasos, de poder cambiar cuidadosamente los índices mudos. Usaremos bastantes estas propiedades.

A partir de los generadores de rotaciones L_i vimos en clase que tres operadores V_x, V_y y V_z son las componentes de un operador vectorial $\mathbf{V}$ si satisfacen la relación

$$[L_i, V_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}V_k. \tag{3}$$

Recordemos que en tres dimensiones toda rotación R está caracterizada por una dirección $\hat{n}$ alrededor de la cual girar una cantidad θ. Teniendo esto en mente definimos el operador de rotación como el operador unitario

$$\mathcal{D}(R(\hat{n},\theta)) = e^{-i\theta\mathbf{L}\cdot\hat{n}/\hbar}.$$

Decimos entonces que V_i es componente de un operador vectorial si

$$\mathcal{D}(R(\hat{n},\theta))^\dagger V_i \mathcal{D}(R(\hat{n},\theta)) = R_{ij}V_j,$$

con R_{ij} las componentes de la matriz de rotación R. A partir de esta definición se sigue que un operador S es un operador escalar si se preserva ante rotaciones, es decir

$$\mathcal{D}(R(\hat{n},\theta))^\dagger S \mathcal{D}(R(\hat{n},\theta)) = S.$$

Y si expandimos el operador de rotación en potencias de θ vemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(R(\hat{n},\theta))^\dagger S \mathcal{D}(R(\hat{n},\theta)) &= S \\
(1 + i\frac{\theta}{\hbar}\mathbf{L}\cdot\hat{n} + \cdots)S(1 - i\frac{\theta}{\hbar}\mathbf{L}\cdot\hat{n} + \cdots) &= S \\
S + i\frac{\theta}{\hbar}(\mathbf{L}\cdot\hat{n}S - S\mathbf{L}\cdot\hat{n}) + \mathcal{O}(\theta^2) &= S \\
i\frac{\theta}{\hbar}[\mathbf{L}\cdot\hat{n}, S] + \mathcal{O}(\theta^2) &= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Donde vemos que un operador escalar debe cumplir $[L_i, S] = 0$ para todas las componentes del momento angular. Esto es, de hecho, una equivalencia.

Veamos además que si los L_i están asociados a rotaciones deben cumplirse, al menos, dos propiedades importantes de los generadores de rotación y operadores vectoriales.

Por un lado sabemos que el producto interno de dos vectores es invariante ante rotaciones[1]; entonces nos gustaría que esto siga valiendo para operadores vectoriales, y en efecto es así. Dados dos operadores vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, veamos que $\mathbf{V}\cdot\mathbf{W}$ es un operador escalar:

$$\begin{aligned}
[L_i, \mathbf{V}\cdot\mathbf{W}] &= [L_i, V_jW_j] \\
&= [L_i, V_j]W_j + V_j[L_i, W_j] \\
&= i\hbar\epsilon_{ijk}V_kW_j + i\hbar\epsilon_{ijk}V_jW_k \\
&= i\hbar\epsilon_{ijk}(V_kW_j + V_jW_k) \\
[L_i, \mathbf{V}\cdot\mathbf{W}] &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Donde usamos que la contracción de un tensor simétrico con otro antisimétrico se anula[2]. Se sigue directamente que el módulo de cualquier operador vectorial $V^2 = \mathbf{V}\cdot\mathbf{V}$ es un operador escalar, es decir que $[L_i, V^2] = 0$. Y por lo mismo es fácil mostrar que para toda función analítica $f(x)$, vale que

$$[L_i, f(V^2)] = 0. \tag{6}$$

De ahí que operadores vectoriales, importantes para nosotros, como la posición $\mathbf{r}$; el momento lineal $\mathbf{p}$ y el momento angular $\mathbf{L}$ cumplan

$$[L_i, r^2] = [L_i, p^2] = [L_i, L^2] = 0. \tag{7}$$

[1] Justamente definimos la rotación como una transformación espacial que preserva el ángulo y la norma de vectores.

[2] En efecto, consideremos $A_{ij} = A_{ji}$ y $B_{ij} = -B_{ji}$. Entonces $\sum_{ij} A_{ij}B_{ij} = \sum_{ji} A_{ji}B_{ji} = \sum_{ji} A_{ij}(-B_{ij}) = -\sum_{ij} A_{ij}B_{ij}$; es decir que $\sum_{ij} A_{ij}B_{ij} = -\sum_{ij} A_{ij}B_{ij}$. Por lo tanto debe ser cero.

Es decir que r^2, p^2 y L^2 son escalares con el sentido físico de toda la vida; como invariantes ante rotaciones. Y como la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es analítica también $\frac{1}{r}$ (como operador) es un escalar. Esto es importantísimo porque nos permite mostrar fácilmente que el Hamiltoniano es un escalar:

$$[L_i, H] = \frac{1}{2m}[L_i, p^2] - e^2 \left[L_i, \frac{1}{r}\right] = 0. \tag{8}$$

Y por supuesto vale para cualquier potencial V que dependa únicamente de r.

Por otro lado, veamos que dados dos operadores vectoriales $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, el operador producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es efectivamente un vector.

$$\begin{aligned}
[L_i, (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_j] &= [L_i, \epsilon_{jkl} A_k B_l] \\
&= i\hbar \epsilon_{jkl} [L_i, A_k] B_l + i\hbar \epsilon_{jkl} A_k [L_i, B_l] \\
&= i\hbar \epsilon_{jkl} \epsilon_{ikm} A_m B_l + i\hbar \epsilon_{jkl} \epsilon_{ilm} A_k B_m \\
&= i\hbar (\delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{il}\delta_{jm}) A_m B_l + i\hbar (\delta_{jm}\delta_{ik} - \delta_{ij}\delta_{km}) A_k B_m \\
&= i\hbar \delta_{ij} A_m B_m + i\hbar (\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk}) A_k B_m - i\hbar \delta_{ij} A_k B_k \\
&= i\hbar (\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk}) A_k B_m \\
&= i\hbar \epsilon_{ijl} \epsilon_{lkm} A_k B_m \\
[L_i, (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k.
\end{aligned} \tag{9}$$

Por lo que podemos decir que $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ y $\mathbf{L} \times \mathbf{p} = -(\mathbf{p} \times \mathbf{L})^\dagger$ son operadores vectoriales y por lo tanto el vector de Runge-Lenz[3]

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{p}) - e^2 \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{10}$$

es efectivamente un operador vectorial. Esto nos permite ahorramos las cuentas que nos llevan a ver que $\mathbf{R}$ debe cumplir

$$[L_i, R_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} R_k. \tag{11}$$

Es importante notar que este vector cumple cuatro propiedades:

$$\begin{aligned}
[R_i, H] &= 0 \\
\mathbf{L} \cdot \mathbf{R} &= 0, \\
\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} &= \frac{2}{m} H (L^2 + \hbar^2) + e^4 \\
[R_i, R_j] &= -\frac{2H}{m} i\hbar \epsilon_{ijk} L_k.
\end{aligned} \tag{12}$$

Más adelante demostraremos cada una de estas. La primera dice que $\mathbf{R}$ es un generador de simetrías para el átomo de Hidrógeno. La siguientes dos nos permitirán obtener el espectro de energía. Y la última, junto al momento angular orbital nos permiten escribir el siguiente álgebra cerrado de simetrías

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \\
[L_i, R_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} R_k \\
[R_i, R_j] &= -\frac{2H}{m} i\hbar \epsilon_{ijk} L_k
\end{aligned} \tag{13}$$

Tengamos en cuenta lo siguiente. Dado que $\mathbf{R}$ y $\mathbf{L}$ conmutan con el Hamiltoniano H, estos operadores comparten subespacios invariantes y por lo tanto podemos estudiar todo para un dado nivel de energía [4] $E < 0$. Asimismo los conmutadores (13) se mantienen ahora explicitando $H = E$; por esto podemos normalizar $\mathbf{R}$ definiendo el vector $\mathbf{N} = \sqrt{-\frac{m}{2E}}\mathbf{R}$ y con esto tenemos

[3] Recordemos que a nivel cuántico $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ no es un operador hermítico pues $(\mathbf{p} \times \mathbf{L})_i^\dagger = (\epsilon_{ijk} p_j L_k)^\dagger = \epsilon_{ijk} L_k p_j = -\epsilon_{ikj} L_k p_j = -(\mathbf{L} \times \mathbf{p})_i$. De ahí que el operador hermítico asociado a la cantidad clásica $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ sea su versión hermitizada $\frac{\mathbf{p}\times\mathbf{L} + (\mathbf{p}\times\mathbf{L})^\dagger}{2} = \frac{\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p}}{2}$.

[4] En relación al problema clásico donde las orbitas cerradas se obtiene para energías negativas.

$$
\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \\
[L_i, N_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}N_k \\
[N_i, N_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}L_k.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

La clausura de este sistema de conmutadores nos deja redefinir los vectores $\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{N})$ y $\mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{N})$, para los cuales el sistema deviene en

$$
\begin{aligned}
[K_i, K_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}K_k \\
[K_i, I_j] &= 0 \\
[I_i, I_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}I_k.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Vemos entonces que tanto $\mathbf{K}$ como $\mathbf{I}$ generan dos álgebras de momento angular independientes[5]. Al ser momentos angulares conocemos exactamente sus autovalores. También sabemos que el espacio de Hilbert de cada uno está generado por $|k, m_k\rangle$ y $|i, m_i\rangle$ tales que

$$
\mathbf{K}^2|k, m_k\rangle = \hbar^2 k(k+1)|k, m_k\rangle \qquad K_z = \hbar m_k|k, m_k\rangle
$$

$$
\mathbf{I}^2|i, m_\rangle = \hbar^2 i(i+1)|i, m_i\rangle, \qquad I_z = \hbar m_i|i, m_i\rangle
$$

con $k, i = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$, $m_k = -k, \cdots, k$ y $m_i = -i, \cdots, i$.

Asimismo podemos invertir las redefiniciones y despejar $\mathbf{R} = -\frac{2E}{m}(\mathbf{K} - \mathbf{I})$ y $\mathbf{L} = \mathbf{K} + \mathbf{I}$. Y como estos vectores son ortogonales se sigue

$$
\mathbf{R} \cdot \mathbf{L} = -\frac{2E}{m}(\mathbf{K} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{K} + \mathbf{I}) = -\frac{2E}{m}(\mathbf{K}^2 - \mathbf{I}^2) = 0 \to \mathbf{K}^2 = \mathbf{I}^2,
\tag{16}
$$

donde en el último paso usamos que $\mathbf{K}$ e $\mathbf{I}$ conmutan. Es decir que ambos operadores tienen el mismo espectro, y esto ocurre únicamente si $i = k$. Finalmente, conociendo $\mathbf{R}^2$ podemos calcular explícitamente $\mathbf{K}^2$ como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}^2 &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{L} + \sqrt{-\frac{m}{2E}}\mathbf{R}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 - \frac{m}{2E}\mathbf{R}^2 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[\mathbf{L}^2 - \frac{m}{2E}\left(\frac{2E}{m}(\mathbf{L}^2 + \hbar^2) + e^4\right)\right] \\
\mathbf{K}^2 &= \frac{1}{4}\left[-\frac{me^4}{2E} - \hbar^2\right]
\end{aligned}
\tag{17}
$$

A partir de la cuantización de $\mathbf{K}^2$ podemos despejar la energía

$$
\frac{1}{4}\left[-\frac{me^4}{2E} - \hbar^2\right] = \hbar^2 k(k+1) \to E = -\frac{me^4}{2\hbar^2(2k+1)^2}
\tag{18}
$$

Dado el rango de k es claro que $2k + 1 = 1, 2, 3, \cdots$, por lo que conviene redefinir el número cuántico $n = 2k + 1 \in \mathbb{N}_0$. Y con esto la energía se cuantiza como

$$
E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}
\tag{19}
$$

Por otro lado, el momento angular orbital es $\mathbf{L} = \mathbf{K} + \mathbf{I}$. Y dado que estamos sumando dos momentos angulares, el número cuántico l surge de la regla de selección

$$
|i - k| \leq l \leq i + k \to 0 \leq l \leq 2k = n - 1
$$

Entonces la existencia de dos generadores de simetría implica la degeneración del nivel de energía n en los números cuánticos de momento angular orbital $l = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ y la proyección en alguna dirección $m_l = -l, -l+1, \cdots, l-1, l$. Finalmente, tal y como sabíamos, el espacio de Hilbert del átomo de hidrogeno es el generado por los kets $|n, l, m_l\rangle$ con

[5] Esto se sigue de $[K_i, I_j] = 0$.

$$
\begin{aligned}
H|n,l,m_l\rangle &= -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}|n,l,m_l\rangle \qquad n = 0,1,2,\cdots \\
\mathbf{L}^2|n,l,m_l\rangle &= \hbar^2 l(l+1)|n,l,m_l\rangle \qquad l = 0,1,\cdots,n-1 \\
L_z|n,l,m_l\rangle &= \hbar m_l|n,l,m_l\rangle \qquad -l \leq m_l \leq l.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Recuperando el resultado conocido para el átomo de Hidrogeno.

Procedemos a calcular las cuentas difíciles.

$[H, R_i]$:

En primer lugar mostremos que $\mathbf{R}$ es un generador de simetrías, es decir conmuta con el Hamiltoniano:

$$
\begin{aligned}
[R_i, H] &= \left[\frac{1}{2m}((\mathbf{p}\times\mathbf{L})_i - (\mathbf{L}\times\mathbf{p})_i) - e^2\frac{x_i}{r}, H\right] \\
&= \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p}\times\mathbf{L})_i, H\right] + \left[\frac{1}{2m}(-(\mathbf{L}\times\mathbf{p})_i), H\right] + \left[-e^2\frac{x_i}{r}, H\right] \\
&= \frac{1}{2m}\left[(\mathbf{p}\times\mathbf{L})_i, H\right] - \frac{1}{2m}\left[(\mathbf{L}\times\mathbf{p})_i, H\right] - e^2\left[\frac{x_i}{r}, H\right] \\
&= \frac{1}{2m}\left[\epsilon_{ijk}p_j L_k, H\right] - \frac{1}{2m}\left[\epsilon_{ijk}L_j p_k, H\right] - e^2\left[\frac{x_i}{r}, H\right]
\end{aligned} \tag{21}
$$

Veamos esto ordenadamente. Dado que $\mathbf{L}\times\mathbf{p} = -(\mathbf{p}\times\mathbf{L})^\dagger$, entonces

$$
\begin{aligned}
[\epsilon_{ijk}L_j p_k, H] &= [(\epsilon_{ijk}p_k L_j)^\dagger, H] \\
&= [H, \epsilon_{ijk}p_k L_j]^\dagger \\
[\epsilon_{ijk}L_j p_k, H] &= -[\epsilon_{ijk}p_k L_j, H]^\dagger
\end{aligned} \tag{22}
$$

De manera que $[R_i, H] = \frac{1}{2m}[\epsilon_{ijk}p_k L_j, H] + \frac{1}{2m}[\epsilon_{ijk}p_k L_j, H]^\dagger - e^2[\frac{x_i}{r}, H]$. Por lo que bastaría con calcular solo dos conmutadores. Este *truquito* de que un término del conmutador sea el adjunto de otro es algo que se va a repetir seguido. Es útil tenerlo muy presente. Entonces el primer término es

$$
\begin{aligned}
[\epsilon_{ijk}p_j L_k, H] &= \epsilon_{ijk}\left([p_j, H]\, L_k + p_j\,[L_k, H]\right) \\
&= \epsilon_{ijk}\,[p_j, H]\, L_k \\
&= \epsilon_{ijk}\left[p_j, \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}\right] L_k \\
&= -e^2\epsilon_{ijk}\left[p_j, \frac{1}{r}\right] L_k \\
&= -e^2\epsilon_{ijk}\frac{d}{dx_l}\left(\frac{1}{r}\right)[p_j, x_l]\, L_k \\
&= -e^2\epsilon_{ijk}\left(-\frac{x_l}{r^3}\right)(-i\hbar\delta_{jl})L_k \\
[\epsilon_{ijk}p_j L_k, H] &= -i\hbar e^2\epsilon_{ijk}\frac{x_j}{r^3}L_k
\end{aligned} \tag{23}
$$

Vectorialmente podemos decir $[\mathbf{p}\times\mathbf{L}, H] = -i\hbar e^2\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{L}$. Y de la observación anterior se sigue directemente, también en su forma vectorial, que $[\mathbf{L}\times\mathbf{p}, H] = -i\hbar e^2\mathbf{L}\times\frac{\mathbf{r}}{r}$.

Por ahora el conmutador viene siendo

$$
[R_i, H] = -i\frac{\hbar e^2}{2m}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right)_i - e^2\left[\frac{x_i}{r}, H\right].
$$

Veamos que el último término da lo necesario para anular el conmutador. Pero antes de seguir, notemos la siguiente igualdad.

$$
\begin{aligned}
\left[p_i, \frac{x_j}{r}\right] &= [p_i, x_j]\frac{1}{r} + x_j\left[p_i, \frac{1}{r}\right] \\
&= -i\hbar\delta_{ij}\frac{1}{r} + x_j\frac{d}{dx_l}\left(\frac{1}{r}\right)[p_i, x_l] \\
&= -i\hbar\delta_{ij}\frac{1}{r} - \frac{x_j x_l}{r^2}(-i\hbar\delta_{il}) \\
&= -i\hbar\delta_{ij}\frac{1}{r} + i\hbar\frac{x_i x_j}{r^3} \\
&= -i\hbar\delta_{ij}\frac{x_k x_k}{r^3} + i\hbar\frac{x_i x_j}{r^3} \\
\left[p_i, \frac{x_j}{r}\right] &= -i\hbar\frac{\delta_{ij}x_k x_k - x_i x_j}{r^3}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Entonces el último término del conmutador $[R_i, H]$ es

$$
\begin{aligned}
\left[-e^2\frac{x_i}{r}, H\right] &= \left[-e^2\frac{x_i}{r}, \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}\right] \\
&= -\frac{e^2}{2m}\left[\frac{x_i}{r}, p^2\right] \\
&= -\frac{e^2}{2m}\left(\left[\frac{x_i}{r}, p_j\right]p_j + p_j\left[\frac{x_i}{r}, p_j\right]\right) \\
&= -\frac{e^2}{2m}\left(i\hbar\frac{\delta_{ij}x_k x_k - x_i x_j}{r^3}p_j + p_j i\hbar\frac{\delta_{ij}x_k x_k - x_i x_j}{r^3}\right) \\
&= -\frac{i\hbar e^2}{2m}\left(\frac{1}{r^3}(x_j x_j p_i - x_i x_j p_j) + (p_i x_j x_j - p_j x_i x_j)\frac{1}{r^3}\right) \\
&= -\frac{i\hbar e^2}{2m}\left(\frac{1}{r^3}(x_j x_j p_i - x_i x_j p_j) + (x_j p_i x_j - i\hbar x_i - x_i p_j x_j + i\hbar x_i)\frac{1}{r^3}\right) \\
\left[-e^2\frac{x_i}{r}, H\right] &= -\frac{i\hbar e^2}{2m}\left(\frac{1}{r^3}(x_j x_j p_i - x_i x_j p_j) + (x_j p_i x_j - x_i p_j x_j)\frac{1}{r^3}\right)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

A simple vista podemos ver que el término tiene *forma* de $\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$ y el segundo tiene forma de $(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\times\mathbf{r}$, que es justamente lo que necesitamos para anular el conmutador $[R_i, H]$. Veamos la componente i-ésima de cada vector.

En primer lugar, la componente $(\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p}))_i = (\mathbf{r}\times\mathbf{L})_i$ es

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{r}\times\mathbf{L})_i &= (\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p}))_i \\
&= \epsilon_{ijk}x_j\epsilon_{klm}x_l p_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})x_j x_l p_m \\
&= x_j x_i p_j - x_j x_j p_i \\
(\mathbf{r}\times\mathbf{L})_i &= x_i x_j p_j - x_j x_j p_i.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Y la componente $((\mathbf{r}\times\mathbf{p})\times\mathbf{r})_i = (\mathbf{L}\times\mathbf{r})_i$ es

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{L}\times\mathbf{r})_i &= ((\mathbf{r}\times\mathbf{p})\times\mathbf{r})_i \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}x_l p_m x_k \\
&= (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})x_l p_m x_k \\
(\mathbf{L}\times\mathbf{r})_i &= x_i p_j x_j - x_j p_i x_j.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Como anticipamos, resulta ser $\left[-e^2\frac{x_i}{r}, H\right] = -\frac{i\hbar e^2}{2m}\left(-\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{L}\right)_i + \left(\mathbf{L}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right)_i\right)$. O en su forma vectorial

$$
\left[-e^2\frac{\mathbf{r}}{r}, H\right] = \frac{i\hbar e^2}{2m}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right)
\tag{28}
$$

Finalmente, concluimos que

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{R}, H] &= \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) - e^2\frac{\mathbf{r}}{r}, H\right] \\
&= \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}, H\right] + \left[-e^2\frac{\mathbf{r}}{r}, H\right] \\
&= -\frac{i\hbar e^2}{2m}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \frac{i\hbar e^2}{2m}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \\
[\mathbf{R}, H] &= 0.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$\mathbf{L}\cdot\mathbf{R}$:

Veamos ahora que $\mathbf{L}\cdot\mathbf{R}=0$:

$$
\mathbf{L}\cdot\mathbf{R} = \frac{1}{2m}\mathbf{L}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) - e^2\mathbf{L}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}
\tag{30}
$$

Podemos intuir que el último término se va a anular pues $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ es ortogonal a $\mathbf{r}$. En efecto,

$$
\mathbf{L}\cdot\mathbf{r} = L_i x_i = \epsilon_{ikj}x_k p_j x_i = \epsilon_{ijk}p_j x_k x_i + i\hbar\epsilon_{ijk}\delta_{ij}x_i = 0,
\tag{31}
$$

donde usamos que ϵ_{ijk} es antisimétrico en todos sus índices y que δ_{ij} y $x_i x_k$ (pues conmutan) son simétricos en sus índices. Entonces la cuenta se reduce a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}\cdot\mathbf{R} &= \frac{1}{2m}\mathbf{L}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2m}L_i\epsilon_{ijk}(p_jL_k - L_jp_k) \\
&= \frac{1}{2m}L_i\epsilon_{ijk}(L_kp_j + i\hbar\epsilon_{jkl}p_l - L_jp_k) \\
&= \frac{1}{2m}\epsilon_{ijk}L_iL_kp_j - \frac{1}{2m}\epsilon_{ijk}L_iL_jp_k + \frac{1}{2m}i\hbar\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl}L_ip_l \\
&= \frac{1}{2m}\epsilon_{ijk}L_iL_kp_j - \frac{1}{2m}\epsilon_{ikj}L_iL_kp_j + \frac{1}{2m}i\hbar 2\delta_{il}L_ip_l \\
&= \frac{1}{2m}\epsilon_{ijk}(L_iL_k + L_kL_i)p_j + \frac{i\hbar}{m}L_ip_i \\
&= \frac{i\hbar}{m}\epsilon_{ijk}x_jp_kp_i \\
\mathbf{L}\cdot\mathbf{R} &= 0.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Donde en este caso usamos que $L_iL_k + L_kL_i$ es simétrico y p_kp_i también (pues conmutan). Tomando su adjunto llegamos a $(\mathbf{L}\cdot\mathbf{R})^\dagger = \mathbf{R}\cdot\mathbf{L} = 0$.

$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}$:

Pasemos ahora a calcular el módulo cuadrado de $\mathbf{R}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}^2 &= \mathbf{R}\cdot\mathbf{R} \\
&= \frac{1}{(2m)^2}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) - \frac{e^2}{2m}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{e^2}{2m}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) + e^4\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{r^2} \\
&= \frac{1}{(2m)^2}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) - \frac{e^2}{2m}\left[(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\right] + e^4
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Para hacer la cuenta ordenadamente empecemos con el último corchete. Su segundo término es

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) &= \frac{x_i}{r}\epsilon_{ijk}(p_jL_k-L_jp_k)\\
&= \frac{1}{r}\epsilon_{ijk}x_ip_jL_k-\frac{1}{r}\epsilon_{ijk}x_iL_jp_k\\
&= \frac{1}{r}L_kL_k-\frac{1}{r}\epsilon_{ijk}x_ip_kL_j-\frac{1}{r}\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl}x_ip_l\\
&= 2\frac{L^2}{r}-\frac{i\hbar}{r}2\delta_{il}x_ip_l\\
\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) &= \frac{2L^2}{r}-\frac{2i\hbar}{r}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Ahora, notemos lo siguiente:

$$
\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\right)^\dagger=(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})^\dagger\cdot\frac{\mathbf{r}^\dagger}{r}=(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}
\tag{35}
$$

Usando el resultado anterior

$$
(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}=\left(\frac{2L^2}{r}-\frac{2i\hbar}{r}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}\right)^\dagger=\frac{2L^2}{r}+\frac{2i\hbar}{r}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}.
\tag{36}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}+\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) &= \frac{4L^2}{r}-2i\hbar\left(\frac{x_i}{r}p_i-p_i\frac{x_i}{r}\right)\\
&= \frac{4L^2}{r}-2i\hbar\left[\frac{x_i}{r},p_i\right]\\
&= \frac{4L^2}{r}-2i\hbar\frac{1}{r}\left[x_i,p_i\right]-2i\hbar\left[\frac{1}{r},p_i\right]x_i\\
&= \frac{4L^2}{r}-2i\hbar\frac{1}{r}i\hbar\delta_{ii}-2i\hbar\frac{d}{dx_l}\left(\frac{1}{r}\right)[x_l,p_i]x_i\\
&= \frac{4L^2}{r}+\frac{6\hbar^2}{r}-2\hbar^2\frac{x_lx_l}{r^3}\\
&= \frac{4L^2}{r}+\frac{4\hbar^2}{r}\\
(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}+\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) &= \frac{4}{r}\left(L^2+\hbar^2\right)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Vemos que tiene la forma de $V(r)(L^2+\hbar^2)$, que es lo que estamos buscando. Entonces esperamos que del primer término en (33) salga el proporcional a p^2. La estrategia será mandar todas las componentes de $\mathbf{p}$ a la izquierda y esperar que eso sea proporcional a $p^2(L^2+\hbar^2)$.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) &= \epsilon_{ijk}(p_jL_k-L_jp_k)\epsilon_{ilm}(p_lL_m-L_lp_m)\\
&= (\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})(p_jL_k-L_jp_k)(p_lL_m-L_lp_m)\\
&= (p_jL_k-L_jp_k)(p_jL_k-L_jp_k)-(p_jL_k-L_jp_k)(p_kL_j-L_kp_j)\\
&= p_jL_kp_jL_k-L_jp_kp_jL_k-p_jL_kL_jp_k+L_jp_kL_jp_j\\
&\quad-(p_jL_kp_kL_j-L_jp_kp_kL_j-p_jL_kL_kp_j+L_jp_kL_kp_j)\\
&= p_jp_jL_kL_k+i\hbar\epsilon_{kjl}p_jp_lL_k-p_kL_jp_jL_k-i\hbar\epsilon_{jkl}p_lp_jL_k\\
&\quad-p_jL_kp_kL_j-i\hbar\epsilon_{jkl}p_jL_kp_l+L_jp_kp_kL_j+i\hbar\epsilon_{jkl}L_jp_kp_l\\
&\quad-(p_jL_kp_kL_j-L_jp_kp_kL_j-p_jL_kp_jL_k-i\hbar\epsilon_{kjl}p_jL_kp_l+L_jp_kL_kp_j)\\
&= p^2L^2+0-p_k(\mathbf{L}\cdot\mathbf{p})L_k-0-p_j(\mathbf{L}\cdot\mathbf{p})L_j-i\hbar\epsilon_{jkl}p_jL_kp_l+L_jp^2L_j+0\\
&\quad-(p_j(\mathbf{L}\cdot\mathbf{p})L_j-L_jp^2L_j-p_jL_kp_jL_k-i\hbar\epsilon_{kjl}p_jL_kp_l+L_j(\mathbf{p}\cdot\mathbf{L})L_j)\\
&= p^2L^2-i\hbar(\epsilon_{jkl}-\epsilon_{kjl})p_jL_kp_l+p^2L^2+p^2L^2+p_jL_kp_jL_k\\
&= 3p^3L^2+p_jp_jL_kL_k+i\hbar\epsilon_{kjl}p_jp_lL_k-2i\hbar\epsilon_{jkl}L_kp_jp_l-2i\hbar\epsilon_{jkl}i\hbar\epsilon_{jkm}p_mp_l\\
&= 4p^2L^2+0-0+4\hbar^2p^2\\
(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p}) &= 4p^2(L^2+\hbar^2).
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Finalmente obtuvimos el término que esperábamos. Agrupando todo es

$$\mathbf{R}^2 = \frac{1}{4m^2}4p^2(L^2+\hbar^2) - \frac{e^2}{2m}\frac{4}{r}(L^2+\hbar^2) + e^4 = \frac{2}{m}\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}\right)(L^2+\hbar^2) + e^4 = \frac{2}{m}H(L^2+\hbar^2) + e^4. \quad (39)$$

$[R_i, R_j]$:

Por último calculemos los conmutadores $[R_i, R_j]$:

$$\begin{aligned}
[R_i, R_j] &= \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p})_i - e^2\frac{x_i}{r}, \frac{1}{2m}(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p})_j - e^2\frac{x_j}{r}\right] \\
&= \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p})_i, \frac{1}{2m}(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p})_j\right] - \left[e^2\frac{x_i}{r}, \frac{1}{2m}(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p})_j\right] - \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p})_i, e^2\frac{x_j}{r}\right] \\
&= \frac{1}{4m^2}\left[(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p})_i, (\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p})_j\right] + \frac{e^2}{2m}\left[(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p})_j, \frac{x_i}{r}\right] - \frac{e^2}{2m}\left[(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p})_i, \frac{x_j}{r}\right]
\end{aligned} \quad (40)$$

Nuevamente, para hacer las cosas bien veamos término a término. Empecemos por el último:

$$\begin{aligned}
\left[(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{p})_i, \frac{x_j}{r}\right] &= \epsilon_{ilm}\left([p_l L_m, \frac{x_j}{r}] - [L_l p_m, \frac{x_j}{r}]\right) \\
&= \epsilon_{ilm}\left([p_l, \frac{x_j}{r}]L_m + p_l[L_m, \frac{x_j}{r}] - [L_l, \frac{x_j}{r}]p_m - L_l[p_m, \frac{x_j}{r}]\right) \\
&= \epsilon_{ilm}\left((-i\hbar\frac{\delta_{lj}}{r} + i\hbar\frac{x_l j}{r^3})L_m + i\hbar\epsilon_{mjk}p_l\frac{x_k}{r} - i\hbar\epsilon_{ljk}\frac{x_k}{r}p_m - L_l(-i\hbar\frac{\delta_{mj}}{r} + i\hbar\frac{x_m x_j}{r^3})\right) \\
&= -i\hbar\epsilon_{ijk}\frac{L_k}{r} + i\hbar\epsilon_{ikj}\frac{L_k}{r} + i\hbar\epsilon_{ilm}(\epsilon_{mjk}p_l\frac{x_k}{r} + \epsilon_{jlk}\frac{x_l}{r}p_k) + i\hbar\epsilon_{ilm}(\frac{x_l x_j}{r^2}L_m - L_l\frac{x_j x_m}{r^3}) \\
&= -2i\hbar\epsilon_{ijk}\frac{L_k}{r} + i\hbar\epsilon_{ilm}(\epsilon_{mjk}p_l\frac{x_k}{r} + \epsilon_{jlk}\frac{x_l}{r}p_k) + i\hbar\epsilon_{ilm}(\frac{x_l x_j}{r^3}L_m - L_l\frac{x_j x_m}{r^3})
\end{aligned}$$

Este término es realmente complicado y nuevamente tenemos que ver cada por separado cada expresión. Sabemos que el conmutador debe ser proporcional a $\epsilon_{ijk}L_k$; y vemos que el primer término ya tiene esa forma. Veamos qué ocurre con los siguientes. El segundo es

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ilm}(\epsilon_{mjk}p_l\frac{x_k}{r} + \epsilon_{jlk}\frac{x_l}{r}p_k) &= \epsilon_{ilm}\epsilon_{mjk}p_l\frac{x_k}{r} + \epsilon_{ilm}\epsilon_{jlk}\frac{x_k}{r}p_m \\
&= (\delta_{ij}\delta_{lk} - \delta_{ik}\delta_{jl})p_l\frac{x_k}{r} + (\delta_{ij}\delta_{mk} - \delta_{mj}\delta_{ik})\frac{x_k}{r}p_m \\
&= \delta_{ij}p_k\frac{x_k}{r} - p_j\frac{x_i}{r} + \delta_{ij}\frac{x_k}{r}p_k - \frac{x_i}{r}p_k \\
\epsilon_{ilm}(\epsilon_{mjk}p_l\frac{x_k}{r} + \epsilon_{jlk}\frac{x_l}{r}p_k) &= \delta_{ij}(\mathbf{p}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{p}) - (\frac{x_i}{r}p_j + p_j\frac{x_i}{r})
\end{aligned} \quad (41)$$

El siguiente es

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ilm}(\frac{x_l x_j}{r^3}L_m - L_l\frac{x_j x_m}{r^3}) &= \epsilon_{ilm}\epsilon_{mrs}\frac{x_l x_j}{r^3}x_r p_s - \epsilon_{ilm}\epsilon_{lrs}x_r p_s\frac{x_j x_m}{r^3} \\
&= (\delta_{ir}\delta_{ls} - \delta_{is}\delta_{lr})\frac{x_l x_j}{r^3}x_r p_s - (\delta_{mr}\delta_{is} - \delta_{ms}\delta_{ir})x_r p_s\frac{x_j x_m}{r^3} \\
&= \frac{x_i x_j}{r^3}x_k p_k - \frac{x_k x_k}{r^3}x_j p_i - x_k p_i\frac{x_k x_j}{r^3} + x_i p_k\frac{x_k x_j}{r^3} \\
&= \frac{x_i x_j}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} - \frac{x_j}{r}p_i - p_i x_k\frac{x_k x_j}{r^3} - i\hbar\delta_{ik}\frac{x_k x_j}{r^3} + p_k x_i\frac{x_k x_j}{r^3} + i\hbar\delta_{ik}\frac{x_k x_j}{r^3} \\
&= \frac{x_i x_j}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} - \frac{x_j}{r}p_i - p_i\frac{x_j}{r} - i\hbar\frac{x_i x_j}{r^3} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\frac{x_i x_j}{r^3} + i\hbar\frac{x_i x_j}{r^3} \\
\epsilon_{ilm}(\frac{x_l x_j}{r^3}L_m - L_l\frac{x_j x_m}{r^3}) &= \frac{x_i x_j}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\frac{x_i x_j}{r^3} - (\frac{x_j}{r}p_i + p_i\frac{x_j}{r})
\end{aligned} \quad (42)$$

Reuniendo todos los términos finalmente es

$$
\begin{aligned}
\Big[(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})_i, \frac{x_j}{r}\Big] &= -2i\hbar\epsilon_{ijk}\frac{L_k}{r} + i\hbar\delta_{ij}(\mathbf{p}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{p}) - i\hbar(\frac{x_i}{r}p_j + p_j\frac{x_i}{r}) \\
& i\hbar\frac{x_ix_j}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} + i\hbar\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\frac{x_ix_j}{r^3} - i\hbar(\frac{x_j}{r}p_i + p_i\frac{x_j}{r}) \\
\Big[(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})_i, \frac{x_j}{r}\Big] &= -2i\hbar\epsilon_{ijk}\frac{L_k}{r} + i\hbar((\delta_{ij} + \frac{x_ix_j}{r^2})\mathbf{p}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{p}(\delta_{ij} + \frac{x_ix_j}{r^2})) \\
& - i\hbar(\frac{x_i}{r}p_j + p_j\frac{x_i}{r} + \frac{x_j}{r}p_i + p_i\frac{x_j}{r})
\end{aligned} \tag{43}
$$

El término que debemos restarle es surge del intercambio de los índices i y j.

$$
\begin{aligned}
\Big[(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})_j, \frac{x_i}{r}\Big] &= 2i\hbar\epsilon_{ijk}\frac{L_k}{r} + i\hbar((\delta_{ij} + \frac{x_ix_j}{r^2})\mathbf{p}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{p}(\delta_{ij} + \frac{x_ix_j}{r^2})) \\
& - i\hbar(\frac{x_i}{r}p_j + p_j\frac{x_i}{r} + \frac{x_j}{r}p_i + p_i\frac{x_j}{r})
\end{aligned} \tag{44}
$$

Es claro que al restar los términos simétricos en i y j se cancelarán. Entonces solo quedan los términos antisimétricos en estos índices, y este es únicamente el proporcional a ϵ_{ijk}. Finalmente

$$
\frac{e^2}{2m}\Big[(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})_j, \frac{x_i}{r}\Big] - \frac{e^2}{2m}\Big[(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})_i, \frac{x_j}{r}\Big] = \frac{2}{m}\frac{e^2}{r}i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \tag{45}
$$

Por último resta calcular el primer término en (40). Este lo tenemos que hacer con cuidado.

$$
\begin{aligned}
[(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})_i, (\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})_j] &= [\mathbf{p}\times\mathbf{L}_i, \mathbf{p}\times\mathbf{L}_j] - [\mathbf{p}\times\mathbf{L}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j] - [\mathbf{L}\times\mathbf{p}_i, \mathbf{p}\times\mathbf{L}_j] + [\mathbf{L}\times\mathbf{p}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j] \\
&= [\mathbf{p}\times\mathbf{L}_i, \mathbf{p}\times\mathbf{L}_j] + [\mathbf{L}\times\mathbf{p}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j] - [\mathbf{p}\times\mathbf{L}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j] + [\mathbf{p}\times\mathbf{L}_j, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_i] \\
&= [-(\mathbf{L}\times\mathbf{p})_i^\dagger, -(\mathbf{L}\times\mathbf{p})_j^\dagger] + [\mathbf{L}\times\mathbf{p}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j] - [\mathbf{p}\times\mathbf{L}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j] + [\mathbf{p}\times\mathbf{L}_j, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_i] \\
&= [\mathbf{L}\times\mathbf{p}_j, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_i]^\dagger + [\mathbf{L}\times\mathbf{p}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j] - [\mathbf{p}\times\mathbf{L}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j] + [\mathbf{p}\times\mathbf{L}_j, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_i]
\end{aligned}
$$

Vemos entonces que solo debemos calcular los términos $[\mathbf{L}_i\times\mathbf{p}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j]$ y $[\mathbf{p}\times\mathbf{L}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j]$. El primero es

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{L}\times\mathbf{p}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j] &= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}[L_lp_m, L_rp_s] \\
&= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\left([L_l, L_r]p_sp_m + L_r[L_l, p_s]p_m + L_l[p_m, L_r]p_s + L_lL_r[p_m, p_s]\right) \\
&= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\left(i\hbar\epsilon_{lrk}L_kp_sp_m + i\hbar\epsilon_{lsk}L_rp_kp_m + i\hbar\epsilon_{mrk}L_lp_kp_s\right) \\
&= i\hbar\epsilon_{ilm}\left[(\delta_{jl}\delta_{sk} - \delta_{jk}\delta_{sl})L_kp_sp_m + (\delta_{jk}\delta_{rl} - \delta_{jl}\delta_{rk})L_rp_kp_m + (\delta_{jm}\delta_{sk} - \delta_{jk}\delta_{rl})L_lp_kp_s\right] \\
&= i\hbar\epsilon_{ijk}\mathbf{L}\cdot\mathbf{p}L_k - i\hbar\epsilon_{ilm}L_jp_lp_m + i\hbar\epsilon_{ilm}L_lp_jp_m - i\hbar\epsilon_{ijk}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{p})p_k + i\hbar\epsilon_{ilj}L_lp^2 - i\hbar\epsilon_{ilm}L_lp_jp_m \\
[\mathbf{L}\times\mathbf{p}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j] &= -i\hbar\epsilon_{ijk}p^2L_k.
\end{aligned}
$$

Dónde usamos que $\mathbf{L}\cdot\mathbf{p} = 0$. Con esto los primeros dos sumandos dan

$$
[\mathbf{L}\times\mathbf{p}_j, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_i]^\dagger + [\mathbf{L}\times\mathbf{p}_i, \mathbf{L}\times\mathbf{p}_j] = -2i\hbar p^2\epsilon_{ijk}L_k. \tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{L}\times\mathbf{p}_i, \mathbf{p}\times\mathbf{L}_j] &= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}[L_lp_m, p_rL_s] \\
&= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\left([L_l, p_r]L_sp_m + p_r[L_l, L_s]p_m + L_l[p_m, p_r]L_s + L_lp_r[p_m, L_s]\right) \\
&= i\hbar\epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\left(\epsilon_{lrk}p_kL_sp_m + \epsilon_{lsk}p_rL_kp_m + \epsilon_{msk}L_lp_rp_k\right) \\
&= i\hbar\epsilon_{ilm}\left((\delta_{jl}\delta_{sk} - \delta_{jk}\delta_{sl})p_kL_sp_m + (\delta_{jk}\delta_{rl} - \delta_{jl}\delta_{rk})p_rL_kp_m + (\delta_{jk}\delta_{rm} - \delta_{jm}\delta_{rk})L_lp_rp_k\right) \\
&= i\hbar\epsilon_{ijk}\mathbf{p}\cdot\mathbf{L}p_k - i\hbar\epsilon_{ilm}p_jL_lp_m + i\hbar\epsilon_{ilm}p_lL_jp_m - i\hbar\epsilon_{ijk}\mathbf{p}\cdot\mathbf{L}p_k + i\hbar\epsilon_{ilm}L_lp_mp_j - i\hbar\epsilon_{ilj}L_lp^2 \\
&= -i\hbar\epsilon_{ilm}L_lp_jp_m - (i\hbar)^2\epsilon_{ilm}\epsilon_{jlk}p_kp_m + i\hbar\epsilon_{ilm}L_jp_lp_m + (i\hbar)^2\epsilon_{ilm}\epsilon_{ljk}p_kp_m + i\hbar\epsilon_{ilm}L_lp_jp_m + i\hbar\epsilon_{ijk}p^2L_k \\
&= \hbar^2\epsilon_{ilm}\epsilon_{jlk}p_kp_m + i\hbar\epsilon_{ijk}p^2L_k \\
&= \hbar^2(\delta_{ij}\delta_{mk} - \delta_{ik}\delta_{jm})p_kp_m + i\hbar\epsilon_{ijk}p^2L_k \\
&= \hbar^2\delta_{ij}p^2 - \hbar^2p_ip_j + i\hbar\epsilon_{ijk}p^2L_k
\end{aligned} \tag{47}
$$

Nuevamente, al restar solo sobreviven los términos antisimétricos en i y j, i.e. resulta

$$[\mathbf{L}\times\mathbf{p}_i, \mathbf{p}\times\mathbf{L}_j] - [\mathbf{L}\times\mathbf{p}_j, \mathbf{p}\times\mathbf{L}_i] = 2p^2 i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \tag{48}$$

Finalmente,

$$\frac{1}{4m}[(\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})_i, (\mathbf{p}\times\mathbf{L}-\mathbf{L}\times\mathbf{p})_j] = -\frac{1}{m^2}p^2 i\hbar\epsilon_{ijk}L_k. \tag{49}$$

Entonces el conmutador (40) resulta en

$$\begin{aligned}
[R_i, R_j] &= -\frac{1}{m^2}p^2 i\hbar\epsilon_{ijk}L_k + \frac{2}{m}\frac{e^2}{r}i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \\
&= -\frac{2}{m}\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}\right)i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \\
[R_i, R_j] &= -\frac{2H}{m}i\hbar\epsilon_{ijk}L_k.
\end{aligned} \tag{50}$$