Dos operadores hermíticos A_1 y A_2, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con un tercer op. hermítico B ($[A_1, B] = [A_2, B] = 0$). Muestre entonces que el espectro de B debe estar degenerado.

→ Asumimos que $\hat{B}$ tiene un espectro degenerado, y entonces sus autoestados son de la forma

$$\{ |b_{k,\gamma_k}\rangle \;:\; \underbrace{k = 1, \ldots, N}_{\text{\# de autovalores}} \;;\; \gamma_k = 1, \ldots, \underbrace{g_k}_{\text{degeneración del autovalor } j} \} \longrightarrow \boxed{\hat{B}|b_{k,\gamma_k}\rangle = b_k |b_{k,\gamma_k}\rangle}$$

Ejemplo:

$k=3$ $\quad g_3 = 2$
$\hat{B}|b_{3,1}\rangle = b_3 |b_{3,1}\rangle$
$\hat{B}|b_{3,2}\rangle = b_3 |b_{3,2}\rangle$

→ **RESULTADO PREVIO IMPORTANTE**: Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ (op. hermíticos) conmutan ⇒ existe una base común de autoestados $\{|\varphi\rangle_i\}$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}|\varphi\rangle_i = a_i |\varphi\rangle_i \\ \hat{B}|\varphi\rangle_i = b_i |\varphi\rangle_i \end{array}\right\} \rightarrow \text{se pueden diagonalizar en la misma base}$$

→ En éste caso $\begin{cases} [\hat{A}_1, \hat{B}] = 0 \\ [\hat{A}_2, \hat{B}] = 0 \end{cases}$

OBS: Si $\hat{A}_1$ y $\hat{B}$ conmutan → $\hat{B}(\hat{A}_1 |b_{k,\gamma_k}\rangle) \overset{\text{conmutan}}{=} \hat{A}_1 \hat{B} |b_{k,\gamma_k}\rangle \overset{\text{aplico } \hat{B}}{=} b_k (\hat{A}_1 |b_{k,\gamma_k}\rangle)$ → $\hat{A}_1 |b_{k,\gamma_k}\rangle$ es autoestado de $\hat{B}$ con el mismo autovalor que b_k

⇒ A_1 debe dejar invariante el subespacio asociado a b_k $\forall\, k = 1, \ldots, N$ (y lo mismo con $\hat{A}_2$) (*)

→ En representación matricial en la base $\{|b_{k,\gamma_k}\rangle\}$:

(*) Es decir, si aplicamos $\hat{A}_1$ a un autovector de $\hat{B}$, $|b_{k,\gamma_k}\rangle$, no necesariamente obtenemos el mismo vector (xq NO ES AUTOVECTOR DE $\hat{A}_1$) pero obtenemos un vector dentro del subespacio de autovectores asociados al autovalor b_i

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \underbrace{\mathbb{1}_{g_1 \times g_1}}_{\text{identidad de dimensión } g_1 \times g_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 \mathbb{1}_{g_2 \times g_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_N \mathbb{1}_{g_N \times g_N} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_1^{(k)} & \\ & & & \ddots \; A_1^{(N)} \end{pmatrix} \qquad \hat{A}_2 = \begin{pmatrix} A_2^{(1)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_2^{(k)} & \\ & & & \ddots \; A_2^{(N)} \end{pmatrix}$$

} diagonalizas (por bloques) simultaneamente en la base $\{|b_{k,\gamma_k}\rangle\}$

bloques de dimensión $g_k \times g_k$ → OBS: estos bloques NO SON DIAGONALES, pueden ser cualquier cosa mientras sea de la dimensión correcta.

→ El conmutador entre $\hat{A}_1$ y $\hat{A}_2$:

$$[\hat{A}_1, \hat{A}_2] = \begin{pmatrix} [A_1^{(1)}, A_2^{(1)}] & & \\ & [A_1^{(k)}, A_2^{(k)}] & \\ & & \ddots \; [A_1^{(N)}, A_2^{(N)}] \end{pmatrix}$$

↳ Si $g_k = 1$ $\forall\, k = 1, \ldots, N$ (es decir, no hay degeneración):

$$\left.\begin{array}{l} A_1^{(k)} = a_1^{(k)} \\ A_2^{(k)} = a_2^{(k)} \end{array}\right\} \text{son escalares} \Rightarrow [A_1^{(k)}, A_2^{(k)}] = 0 \Rightarrow [\hat{A}_1, \hat{A}_2] = 0$$

↳ Pero la hipótesis del enunciado es que $[\hat{A}_1, \hat{A}_2] \neq 0$ ⇒ debe existir al menos un $g_k > 1$ para que se cumpla la hipótesis

⇒ el espectro de B es degenerado

Ejemplo atomo de Hidrógeno

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(r) \;\begin{cases} \text{autovalores} \longrightarrow E_n \text{ depende de un \# cuántico } n \\ \text{autovectores} \longrightarrow |\varphi_{nlm}\rangle \text{ dependen de otros \# cuánticos} \end{cases} \Rightarrow \text{el espectro está degenerado}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} \to \hat{H} \\ \hat{A}_1 \to \hat{L}_x \\ \hat{A}_2 \to \hat{L}_y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} [\hat{H}, \hat{L}_i] = 0 & \text{conmutan ✓} \\ [\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k & \text{no conmutan ✗} \end{array}$$