G2.P8

Daniel Fondevila

U operador unitario : $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$

a) autovals de módulo 1

$|i\rangle$ base de $\mathcal{H}$

U diagonalizable $\quad U = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$

Unitaria : $UU^\dagger = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i| \sum_j \bar{\lambda}_j |j\rangle\langle j| = \sum_{ij} \lambda_i \bar{\lambda}_j |i\rangle\langle i|j\rangle\langle j|$

$= \sum_i \lambda_i \bar{\lambda}_i |i\rangle\langle i| = \mathbb{1} = \sum_i |i\rangle\langle i|$

$\Rightarrow \sum_i (|\lambda_i|^2 - 1) |i\rangle\langle i| = 0 \iff \boxed{|\lambda_i|^2 = 1}$

b) U siempre puede escribirse como $U = e^{iM}$ con M op. hermítico.

Resultado P5 : Sea M hermítica $M = \sum_i b_i |i\rangle\langle i| \quad b_i \in \mathbb{C}$

y $g(x)$ una función analítica (admite desarrollo en serie de potencias)

$\Rightarrow g(M) = \sum_i g(b_i) |i\rangle\langle i|$

Como $|\lambda_i|^2 = 1 \Rightarrow \lambda_i = e^{i\theta_i}$ para algún $\theta_i \in [0, 2\pi)$

Consideramos $M = \sum_i \theta_i |i\rangle\langle i|$ y $g(x) = e^{ix}$

$\Rightarrow g(M) = \sum_i e^{i\theta_i} |i\rangle\langle i| = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i| = U$

$$\boxed{e^{iM} = U}$$

c) Mostrar que $\underbrace{U^{-1} = U^{\dagger}}_{\text{por ser unitaria}} = e^{-iM}$

$$U^{\dagger} = \left(e^{iM}\right)^{\dagger} = e^{(iM)^{\dagger}} = e^{-iM} \qquad \text{pues } M^{\dagger} = M$$