

Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2024

Guía 2: Formalismo

I. Espacios de dimensión finita

P1 Suponga que $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert de dimensión 3.

- Considere $|\alpha\rangle = \frac{|1\rangle - i|2\rangle}{\sqrt{2}}$ y $|\beta\rangle = \frac{i|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}$. ¿Cuánto vale $\langle\alpha|\beta\rangle$? ¿Son ortogonales?
- Escriba la representación matricial en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ de los kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$; de los bra $\langle\alpha|$ y $\langle\beta|$; y de los operadores $|\alpha\rangle\langle\alpha|$, $|\beta\rangle\langle\beta|$, $|\alpha\rangle\langle\beta|$ y $|\beta\rangle\langle\alpha|$.
- Considere los tres estados $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$ dados por

$$|a\rangle = \frac{1}{2}(|1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle), \quad |b\rangle = \frac{1}{2}(|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle), \quad |c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |3\rangle).$$

Muestre que $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$ forman una base ortonormal y luego escriba $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ en esta base.

- Repita las partes que involucran $|\beta\rangle$ en los ítems anteriores si ahora $|\beta\rangle = \frac{|1\rangle + i|2\rangle}{\sqrt{2}}$

P2 **Operador de Proyección.** Dado un vector $|\alpha\rangle$ de un espacio de Hilbert de dimensión D , definimos el operador $P_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|$.

- Mostrar que P_α es una *proyección ortogonal*, es decir que satisface: (i) $P_\alpha^2 = P_\alpha$, (ii) $P_\alpha^\dagger = P_\alpha$.
- Sea $\{|1\rangle, \dots, |D\rangle\}$ una base ortonormal. Escribir la representación matricial de P_α en esta base.
- Repita el ítem anterior para el caso particular en que $|\alpha\rangle$ coincide con un elemento de la base, por ejemplo $|\alpha\rangle = |1\rangle$. Deduzca que los autovalores de un proyector ortogonal son todos ceros salvo en el caso del vector sobre el cual proyecta, cuyo autovalor es uno.
- Considere ahora un operador hermítico A y sean $\{a_i\}$ sus autovalores y $\{|a_i\rangle\}$ la respectiva base ortonormal de autoestados (por simplicidad asumimos que no hay degeneración). Para un j fijo, muestre que $P_j = \prod_{i \neq j} \frac{(A - a_i)}{(a_j - a_i)}$ es el proyector sobre el autoestado de autovalor a_j . Calcule los proyectores: P_\pm para un sistema de spin 1/2 con $A = \sigma \cdot \hat{n}$.
- Calcule nuevamente los autoestados de $A = \sigma \cdot \hat{n}$, usando los operadores de proyección P_\pm del ítem anterior.

P3 Considere un espacio de Hilbert de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. Para cada uno de los siguientes operadores

$$(i) M_1 = 2|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + 2i|2\rangle\langle 3| - 2i|3\rangle\langle 2| + 4|3\rangle\langle 3|,$$

$$(ii) M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ en la base } \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\},$$

$$(iii) M_3 |1\rangle = |1\rangle - 2i|3\rangle, M_3 |2\rangle = |2\rangle, M_3 |3\rangle = 2i|1\rangle + |3\rangle;$$

- determine si el operador es hermítico.
- escriba la descomposición del operador como combinación lineal de operadores $\{|i\rangle\langle j|\}_{i,j=1,2,3}$.
- obtenga la representación matricial del operador en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.
- escriba la acción del operador sobre cada elemento de la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.
- obtenga la descomposición espectral del operador.

P4 Sean X, Y dos operadores y $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ dos vectores de norma uno cualesquiera. Usando el álgebra de bras y kets, verifique las siguientes afirmaciones.

- (a) $\text{tr}(X + Y) = \text{tr}(X) + \text{tr}(Y)$.
- (b) $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$.
- (c) La traza de un operador no depende de la base en la que se calcula.
- (d) $\text{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|X) = \langle\beta|X|\alpha\rangle$. Concluya entonces que, en particular:
 - Con $X = \mathbb{I}$, $\text{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|) = \langle\beta|\alpha\rangle$.
 - Valor medio: $\langle X \rangle_{|\alpha\rangle} = \langle\alpha|X|\alpha\rangle = \text{tr}(|\alpha\rangle\langle\alpha|X)$ entonces $\langle X \rangle_{|\alpha\rangle} = \text{tr}(P_{|\alpha\rangle}X)$.
 - Regla de Born: $P(|\beta\rangle||\alpha\rangle) = |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle$ entonces $P(|\beta\rangle||\alpha\rangle) = \text{tr}(P_{|\beta\rangle}P_{|\alpha\rangle})$.
- (e) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

P5 Sea A un operador hermítico cuya descomposición espectral, $A = \sum_i a_i |i\rangle\langle i|$, es conocida y sea g una función tal que admite un desarrollo en series de potencias. Muestre entonces que $g(A) = \sum_i g(a_i) |i\rangle\langle i|$.

P6 Sean A y B dos operadores hermíticos tales que admiten una base completa ortonormal de autovectores simultáneos de A y B , $\{|a_i, b_i\rangle\}$. ¿Se puede siempre concluir que $[A, B] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela. Si es no, dé un contraejemplo.

P7 Dos operadores hermíticos A_1 y A_2 , no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con un tercer operador hermítico B , i.e. $[A_1, B] = [A_2, B] = 0$. Muestre entonces que el espectro de B debe estar degenerado.

P8 Sea U un operador unitario, es decir tal que $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$.

- (a) Mostrar que los autovalores de U tienen módulo 1.
- (b) Mostrar que U siempre se puede escribir como $U = e^{iM}$, donde M es un operador hermítico.
- (c) Usando la expresión para U del ítem anterior, mostrar entonces que $U^{-1} = U^\dagger = e^{-iM}$.

P9 Sean A, B y C operadores. Pruebe las siguientes identidades.

- (a) $AB = BA + [A, B]$
- (b) $[A, B] = -[B, A]$
- (c) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$
- (d) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
- (e) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

P10 Sean A y B dos operadores tales que A conmuta con $[A, B]$. Demostrar que

$$[A^m, B] = mA^{m-1}[A, B].$$

Use esta propiedad para demostrar que

$$[f(A), B] = \frac{df(A)}{dA} [A, B],$$

donde f es una función que admite un desarrollo en serie de potencias de su argumento.

P11 Dados dos operadores A y B , definimos la familia de operadores $C(s)$, parametrizados por un parámetro real $s \in \mathbb{R}$, de la siguiente forma

$$C(s) = e^{sA} B e^{-sA}.$$

Demostrar entonces que: (i) $\frac{dC(s)}{ds} = [A, C(s)]$, (ii) $\frac{d^2C(s)}{ds^2} = [A, [A, C(s)]]$, (iii) $\frac{d^3C(s)}{ds^3} = [A, [A, [A, C(s)]]]$, (iv) y generalice para la n -ésima derivada de $C(s)$. Utilice esto para expandir $C(s)$ en una serie de Taylor alrededor de $s = 0$ y demostrar que

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots$$

Finalmente, para el caso particular en que $[A, B] = cB$, con $c \in \mathbb{C}$, muestre que el resultado anterior implica que

$$e^A B e^{-A} = e^c B.$$

P12 Sean A y B dos operadores que conmutan con $[A, B]$. Demostrar que

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

Ayuda:

- (a) Mostrar que $[e^{\eta A}, B] = \eta e^{\eta A} [A, B]$.
- (b) Definimos $g(\eta) \equiv e^{\eta A} e^{\eta B}$. Demostrar que la derivada es: $\frac{dg}{d\eta} = (A + B + \eta [A, B])g$.
- (c) Integrar la ecuación anterior, con la condición inicial: $g(0) = \mathbb{I}$

P13 (a) Considere un operador tal que $A^2 = \mathbb{I}$ (dé un ejemplo concreto de un operador de este tipo). Demuestre que para todo número complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha A) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha))\mathbb{I} + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))A$$

En particular muestre que: $e^{-i\alpha A} = \cos(\alpha)\mathbb{I} - i \sin(\alpha)A$.

(b) Considere un operador B tal que $B^3 = B$ (¿podría dar un ejemplo?). Demuestre que para todo número complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha B) = f(0)\mathbb{I} + \left(\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0)\right)B^2 + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))B$$

En particular muestre que: $e^{-i\alpha B} = \mathbb{I} + (\cos(\alpha) - 1)B^2 - i \sin(\alpha)B$.

II. Espacios de dimensión infinita

P14 (a) Sean A y B dos operadores. Utilizando la linealidad y la ciclicidad de la traza, calcule $\text{tr}([A, B])$.
 (b) Utilizando la relación de conmutación canónica $[x, p] = i\hbar\mathbb{I}$, calcule $\text{tr}([x, p])$. Compare con lo obtenido en el ítem anterior. ¿Son consistentes ambos resultados? ¿Cuál es el problema?
 (c) ¿Pueden existir dos operadores A y B sobre un espacio de dimensión finita tales que $[A, B] = i\hbar\mathbb{I}$? ¿Por qué?

P15 Dadas funciones F y G que se pueden expandir en serie de potencias de sus argumentos, verifique que

$$[x, G(p)] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial p}, \quad [p, F(x)] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial x}.$$

partiendo de las relaciones de conmutación canónica $[x, p] = i\hbar$.

En particular, utilice esto para evaluar $[x, \mathcal{T}(d)]$, donde $\mathcal{T}(d)$ es el operador unitario

$$\mathcal{T}(d) = \exp\left(\frac{-ipd}{\hbar}\right).$$

Utilizando esto (i) calcule $\mathcal{T}^{-1}(d)x\mathcal{T}(d)$; (ii) compare el valor de $\langle\psi|x|\psi\rangle$ con el de $\langle\psi'|x|\psi'\rangle$, donde $|\psi'\rangle := \mathcal{T}(d)|\psi\rangle$.

P16 Considere un sistema cuyo estado $|\psi\rangle$ es tal que

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} e^{ix/r}, \tag{1}$$

con σ y r constantes reales con unidades de longitud.

- (a) Calcule la representación del estado $|\psi\rangle$ en la base de momento, $\langle p|\psi\rangle$.
- (b) Calcule $\langle\psi|p|\psi\rangle$, usando: (i) la representación en momento de $|\psi\rangle$; (ii) usando la representación en posición de $|\psi\rangle$ y la propiedad $\langle x|p|\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial \langle x|\psi\rangle}{\partial x}$.
- (c) Sea $\mathcal{T}(d)$ el operador de traslación en una distancia d . Calcule entonces la representación en las bases de posición y de momento del estado $|\phi\rangle := \mathcal{T}(d)|\psi\rangle$.