

Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2024

Guía 7: Momento Angular y Rotaciones

I. Momento Angular

P1 Suponga que un sistema se encuentra en un autoestado de J_z con autovalor $\hbar m$.

- Muestre que los valores medios tanto de J_x como J_y son cero, i.e. $\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0$, de dos formas diferentes: (i) usando el principio de incertidumbre, y (ii) usando la expansión de J_x y J_y en términos de J_+ y J_- .
- Muestre que si se mide la proyección de momento angular en la sobre una dirección $\hat{\mathbf{n}}$ que forma un ángulo θ con el eje $\hat{\mathbf{z}}$, entonces $\langle \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \hbar m \cos \theta$.

P2 Considere un sistema de spin 1/2 (es decir $j = 1/2$).

- Construya, por aplicación de los operadores de subida y bajada, la representación matricial de los operadores S^2 , S_x , S_y y S_z en la base de autoestados de S_z . Muestre que se obtiene que los operadores de spin están dados por $S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$, donde σ_i son las matrices de Pauli.
- Usando resultados anteriores, muestre que el operador rotación para un sistema de spin 1/2 se puede escribir como

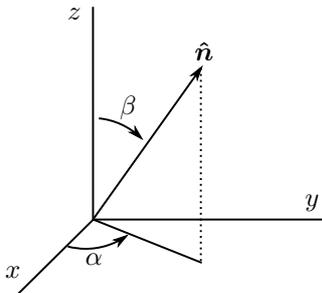
$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{n}}, \phi) = \exp\left(-i \frac{\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} \phi}{\hbar}\right) = \mathbb{I} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right),$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad.

- Escriba explícitamente la matriz de 2×2 que representa la rotación $\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ en la base

$$\left\{ |+\rangle \equiv \left| j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle, |-\rangle \equiv \left| j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} \right\rangle \right\}.$$

- Sea $\hat{\mathbf{n}}$ el versor definido por los ángulos polares α y β según se muestra en la figura. Aplique al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado[†] para obtener el estado $|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}, +\rangle$, que representa un spin orientado según $\hat{\mathbf{n}}$. Compare el resultado con el obtenido en el Problema 10 de la Guía 1.



[†] Pruebe a hacer la cuenta de dos formas diferentes: (i) aplicando una única rotación en un ángulo y dirección adecuados, y (ii) descomponiendo la rotación en rotaciones elementales utilizando los ángulos de Euler.

- Muestre que para una rotación en $\phi = 2\pi$ se satisface

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{n}}, \phi = 2\pi) = -\mathbb{I},$$

y, por lo tanto, ante una rotación en 2π el estado del sistema cambia según

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, 2\pi)} \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{n}}, 2\pi) |\psi\rangle = -|\psi\rangle.$$

Observe que no se obtiene el mismo vector debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pág. 24.

- P3** Considere un estado arbitrario $|\psi\rangle$ de un sistema de spin 1/2, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje \hat{z} , es decir

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{z}, \varphi) |\psi\rangle = \exp\left(-i \frac{S_z \varphi}{\hbar}\right) |\psi\rangle.$$

Calcule los valores medios $\langle\psi'|S_x|\psi'\rangle$, $\langle\psi'|S_y|\psi'\rangle$ y $\langle\psi'|S_z|\psi'\rangle$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle\psi|S_x|\psi\rangle$, $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$ y $\langle\psi|S_z|\psi\rangle$ en el sistema original.

- P4** Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de spin 1/2 representada por

$$\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}(\hat{z}, \alpha) \mathcal{D}(\hat{y}, \beta) \mathcal{D}(\hat{z}, \gamma).$$

- (a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp\left(-i \frac{\sigma_z \alpha}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\sigma_y \beta}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\sigma_z \gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ . Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

- P5** Considere un sistema con momento angular 1 (es decir, $j = 1$).

- (a) Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, la representación matricial de los operadores J^2 , J_x , J_y , y J_z en la base $\{|j = 1, m = 1\rangle, |j = 1, m = 0\rangle, |j = 1, m = -1\rangle\}$ de autoestados de J^2 y J_z . Verifique explícitamente multiplicando las matrices la relación $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$.
- (b) Encuentre la base $\{|j = 1, m_y\rangle\}$ de autoestados de J^2 y J_y , como combinación lineal de los $\{|j = 1, m\rangle\}$.
- (c) Evalúe $J_z(J_z + \hbar)(J_z - \hbar)$ y $J_y(J_y + \hbar)(J_y - \hbar)$ sin usar la representación matricial.
- (d) Muestre que en el caso de momento angular $j = 1$, vale que

$$\mathcal{D}^{(1)}(\hat{y}, \beta) = e^{-iJ_y\beta/\hbar} = 1 - i \left(\frac{J_y}{\hbar}\right) \sin \beta - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 (1 - \cos \beta).$$

Usando esto obtenga

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1 + \cos \beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1 - \cos \beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \cos \beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta \\ \left(\frac{1}{2}\right)(1 - \cos \beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1 + \cos \beta) \end{pmatrix},$$

donde $d(\beta)$ es la representación matricial de $\mathcal{D}(\hat{y}, \beta)$ en la base de autoestados de J_z .

- P6** Considere un sistema con $j = 1$ que se encuentra en el estado $|\psi\rangle$ dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|j = 1, m = 1\rangle - |j = 1, m = -1\rangle).$$

- (a) Si se mide L_x sobre $|\psi\rangle$, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide L_y .
- (b) Suponga que sobre el estado $|\psi\rangle$ se mide L_z y se obtiene \hbar , e inmediatamente después se mide L_y . ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

II. Momento Angular Orbital

P7 Construya los armónicos esféricos Y_l^m . Para ello, resuelva primero $L_+ Y_l^1 = 0$ (usando L_+ en la representación r) y luego aplique el operador L_- a Y_l^1 (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando los resultados de **P5**, escriba la combinación lineal de los armónicos esféricos $\{Y_l^m\}$ que es autoestado de L_y con autovalor \hbar . Verifique su resultado aplicándole L_y en la representación r .

P8 Suponga que fuera posible un valor semi-entero de l para el impulso angular orbital, por ejemplo $l = 1/2$. A partir de

$$L_+ Y_{1/2}^{1/2}(\theta, \phi) = 0,$$

podemos deducir

$$Y_{1/2}^{1/2}(\theta, \phi) \propto e^{i\phi/2} \sqrt{\sin \theta}.$$

Verifique esta afirmación. Intente construir entonces $Y_{1/2}^{-1/2}(\theta, \phi)$ de dos maneras diferentes,

- (a) aplicando L_- a $Y_{1/2}^{1/2}(\theta, \phi)$,
- (b) usando que $L_- Y_{1/2}^{-1/2}(\theta, \phi) = 0$.

Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de l).

P9 Considere un autoestado de impulso angular orbital $|l = 2, m = 0\rangle$. Suponga que este estado es rotado en un ángulo β alrededor del eje \hat{y} . Encuentre la probabilidad de medir $m = 0, \pm 1$, y ± 2 en el nuevo estado.

P10 La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por

$$\Psi(x, y, z) = (x + y + 3z)f(r),$$

con $f(r)$ alguna función de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- (a) ¿Es Ψ autofunción de L^2 ? Si es así, ¿cuál es el valor de l ? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?
- (b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?
- (c) Suponga que se sabe de alguna manera que $\Psi(x, y, z)$ es una autofunción de energía con autovalor E . Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

P11 Considere el Hamiltoniano de un rotor rígido,

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right),$$

donde \mathbf{L} es el impulso angular en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo. A partir de esta expresión obtenga la ecuación de movimiento de Heisenberg para \mathbf{L} y luego halle las ecuaciones de movimiento de Euler en el límite correspondiente.

III. Suma de Momento Angular

P12 Considere una partícula de spin $1/2$ en un estado con momento angular orbital $l = 1$.

- (a) Encuentre el estado con j_{max} y $m_{j_{max}}$ en términos de los estados $|l, s, m_l, m_s\rangle$.
- (b) Use $J_- = L_- + S_-$ para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.
- (c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max} - 1, j_{max} - 1\rangle$.
- (d) Use J_- para generar todos los estados $|j_{max} - 1, m\rangle$.

- (e) ¿Cuál es el valor de expectación de L_z en el estado con $j = 1/2$ y $m = 1/2$? ¿Cuál es el valor de expectación de S_z en ese estado?

P13 Considere dos partículas con spin $1/2$. Calcule todos los coeficientes de Clebsch-Gordan por dos caminos diferentes:

- (a) Escriba los autoestados de spin total S^2 y S_z , $\{|s, m\rangle\}$, en función de los autoestados de S_{1z} , S_{2z} , $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$, usando los operadores S_{\pm} y ortogonalidad (es decir, usando el mismo procedimiento del problema **P12**).
- (b) Escriba las matrices de 4×4 que corresponden a la representación de los operadores

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \quad S_z = S_{1z} + S_{2z},$$

en la base $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$. Luego encuentre la matriz unitaria que diagonaliza estas matrices. ¿Qué son los coeficientes del cambio de base?

P14 El acoplamiento spin-órbita es un efecto relativista que introduce, a bajas energías, una interacción efectiva entre el spin y el momento angular orbital de una partícula. De esta forma, incluyendo el acoplamiento spin-órbita, el Hamiltoniano electrónico para el átomo de Hidrógeno sin campos externos es

$$H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3} \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{\hbar^2}, \quad \text{con } H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r},$$

y donde \mathbf{S} representa el spin del electrón.

- (a) Evalúe los conmutadores

$$[H, L^2], [H, S^2], [H, J^2], [H, L_z], [H, S_z], [H, J_z],$$

donde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores (incluyendo H) que conmutan mutuamente?

Ayuda: recuerde que en coordenadas polares el operador p^2 se escribe como

$$p^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial^2} r + \frac{1}{r^2} L^2.$$

- (b) Considere ahora que se enciende un campo magnético externo $\mathbf{B} = B\hat{z}$, de modo que al Hamiltoniano se le agrega el término

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar} B (L_z + 2S_z).$$

Para este caso, repita el inciso (a).

IV. Operadores Vectoriales, Tensores Esféricos y Teorema de Wigner–Eckart

P15 Sean $\{V_x, V_y, V_z\}$ tres operadores. Decimos que V_i son las componentes de un *operador vectorial* si ante rotaciones V_i se transforma de la forma

$$\mathcal{D}^\dagger(R) V_i \mathcal{D}(R) = \sum_j R_{ij} V_j,$$

donde R es la matriz que define la rotación en \mathbb{R}^3 y $\mathcal{D}(R)$ el operador de rotación asociado en el espacio de Hilbert. Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$[L_j, V_k] = i\hbar \varepsilon_{jkl} V_l.$$

- (a) Verifique que el operador posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es un operador vectorial.
- (b) Verifique que el operador momento $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ es un operador vectorial.
- (c) Verifique que el operador de momento angular orbital $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ es un operador vectorial.

P16 Sean $\{T_{-k}^{(k)}, T_{-k+1}^{(k)}, \dots, T_{k-1}^{(k)}, T_k^{(k)}\}$ $2k + 1$ operadores. Decimos que $T_q^{(k)}$ son las componentes de un *tensor esférico irreducible* de rango k si ante rotaciones $T_q^{(k)}$ se transforma de la forma

$$\mathcal{D}(R) T_q^{(k)} \mathcal{D}^\dagger(R) = \sum_{q'} \mathcal{D}_{q'q}^{(k)}(R) T_{q'}^{(k)},$$

donde $\mathcal{D}_{q'q}^{(k)}$ son los elementos de matriz del operador de rotación en el subespacio de momento angular k , es decir $\langle kq' | \mathcal{D}(R) | kq \rangle$. Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$\left[J_z, T_q^{(k)} \right] = \hbar q T_q^{(k)}, \quad \left[J_\pm, T_q^{(k)} \right] = \hbar \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{q \pm 1}^{(k)}.$$

(a) Verifique que si \mathbf{V} es un operador vectorial, entonces los operadores $V_q^{(1)}$ dados por

$$V_{\pm 1}^{(1)} =: \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \quad V_0 =: V_z,$$

definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(b) Sea \mathbf{V} un operador vectorial. Considere los armónicos esféricos $Y_{l=1}^m(x, y, z)$ en coordenadas cartesianas y sean $V_q^{(1)}$, $q = -1, 0, 1$, operadores definidos de la forma

$$V_q^{(1)} = r Y_1^q(V_x, V_y, V_z),$$

(es decir que en la fórmula de los armónicos esféricos sustituimos las variables x_i por los respectivos operadores V_i). Verifique entonces que los operadores $V_q^{(1)}$ definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(c) Suponiendo que las componentes de \mathbf{V} conmutan entre sí y haciendo uso del hecho que los armónicos esféricos ante rotaciones se transforman de la forma

$$Y_l^m \xrightarrow{R} (Y_l^m)' = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(l)}(R) Y_l^{m'},$$

discuta por qué la sustitución $V_q^{(k)} = r^k Y_k^q(V_x, V_y, V_z)$ en los armónicos esféricos escritos en coordenadas cartesianas nos define un tensor esférico irreducible de rango k .

P17 Sean $V^{(k_1)}$ y $W^{(k_2)}$ dos tensores esféricos irreducibles de rango k_1 y k_2 , respectivamente.

(a) Muestre entonces que los operadores $T_q^{(k)}$, dados por

$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1, q_2} V_{q_1}^{(k_1)} W_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | kq \rangle,$$

forman un tensor esférico irreducible de rango k . Para ello, estudie cómo transforma $T^{(k)}$ ante rotaciones.

(b) A partir de la expresión del inciso anterior, concluya que el producto $V_i W_j$ de las componentes de dos operadores vectoriales \mathbf{V} y \mathbf{W} se puede escribir como la suma de un escalar, otro vector y un tensor esférico de rango 2.

(c) Sean \mathbf{V} y \mathbf{W} dos operadores vectoriales. Construya, a partir de estos dos operadores y utilizando el inciso (a), tensores esféricos irreducibles de rango 0, rango 1 y rango 2 expresados en términos de los productos de las componentes V_i y W_j . En particular, si $\mathbf{V} = \mathbf{W} = \mathbf{R}$ es el operador posición, muestre que el tensor de rango 2 que se obtiene es, a menos de un factor, el operador momento cuadrupolar eléctrico.

P18 Considere una partícula sin spin ligada a un centro fijo mediante de un potencial central. Estudie los elementos de matriz

$$\left\langle n', l', m' \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy) \right| n, l, m \right\rangle \quad \text{y} \quad \langle n', l', m' | z | n, l, m \rangle,$$

utilizando únicamente el teorema de Wigner-Eckart. En particular, trate de relacionar los distintos elementos de matriz entre sí y establezca cuáles de ellos pueden ser no nulos.

P19 El tensor cuadrupolar eléctrico de una partícula de carga q se define como

$$Q_{ik} := q (3x_i x_k - \delta_{ik} r^2).$$

Suponga que se conoce el valor de expectación de la componente zz del momento cuadrupolar en el autoestado de momento angular $|\alpha, j, m = j\rangle$ (donde α es un índice asociado a la dependencia radial del estado; recordar que L^2 y L_z no forman un CCOC). Notemos con Q este valor de expectación, es decir que

$$Q := \langle \alpha, j, m = j | Q_{zz} | \alpha, j, m = j \rangle = q \langle \alpha, j, m = j | (3z^2 - r^2) | \alpha, j, m = j \rangle.$$

(a) Calcule los elementos de matriz

$$q \langle \alpha, j, m' | (x^2 - y^2) | \alpha, j, m = j \rangle, \quad m' = j, j-1, \dots, -j+1, -j.$$

en función de Q y de los coeficientes de Clebsch-Gordan. Para ello,

- (i) Escriba xy , xz , y $(x^2 - y^2)$ como componentes de un tensor esférico irreducible de rango 2.
 - (ii) Evalúe los elementos de matriz buscados utilizando el teorema de Wigner-Eckart.
- (b) Evalúe los valores de expectación de todas las componentes del tensor cuadrupolar sobre los estados $|\alpha, j, m = j\rangle$, es decir calcule

$$\langle \alpha, j, m = j | Q_{ik} | \alpha, j, m = j \rangle,$$

en función del valor de expectación Q . Interprete el resultado.

- (c) Probar que para un núcleo atómico de spin 0 o 1/2 los valores de expectación del momento cuadrupolar eléctrico son nulos (el spin de un núcleo es el momento angular resultante de los spins y momentos angulares relativos de los nucleones constituyentes).