Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2024

Guía 8: Electrodinámica cuántica en cavidades (CQED)

P1 [*] **Interacción de un átomo con un campo clásico: oscilaciones de Rabi**. Consideremos un átomo que tiene dos niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ con energías respectivas $E_g < E_e$. A los fines prácticos de este problema, nos podremos restringir solamente a mirar este subespacio de dimensión 2 del átomo, que actúa de esta forma como un sistema efectivo de dos niveles cuyo Hamiltoniano es

$$H_A = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z,$$

donde $\hbar\omega_a = E_e - E_g$ y $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$. El átomo se acopla con un campo eléctrico externo clásico que oscila con frecuencia ω_c, de forma tal que la interacción entre el electrón de átomo y el campo, en la aproximación dipolar, está dada por $H_{\text{int}} = -q\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(t)$ donde $\boldsymbol{E}(t) = E_0\cos(\omega_c t + \phi)\hat{x}$ (q es de la carga del electrón). Esta interacción en la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ está dada por

$$H_{int} = \hbar\Omega\cos(\omega_c t + \phi)(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|).$$

Sin pérdida de generalidad, se consideró un campo que apunta en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$, por lo que $\Omega = |q|E_0\langle e|\, x\,|g\rangle$, notar que por simetría no hay elementos de matriz diagonales.

(a) Usando la representación de interacción y la aproximación de onda rotante, donde se desprecian los términos de oscilación rápida, pruebe que la interacción $H_{int,I}(t)$ está dada por

$$H_{int,I}(t) = \hbar\omega\cos(\Omega_c t + \phi)(|e\rangle\langle g|\, e^{i\omega_a t} + |g\rangle\langle e|\, e^{-i\omega_a t}) \approx \hbar\frac{\Omega}{2}(|e\rangle\langle g|\, e^{i\Delta t - i\phi} + |g\rangle\langle e|\, e^{-i\Delta t + i\phi})$$

donde $\Delta = \omega_a - \omega_c$ es el "detuning", y Ω es la constante que depende del momento dipolar del átomo y de la amplitud del campo.

(b) Suponga que inicialmente el átomo está en el estado excitado, $|\psi(0)\rangle = |e\rangle$. Para el caso particular de resonancia, es decir $\omega_a = \omega_c$ ($\Delta = 0$) calcule el estado a un tiempo t posterior y la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado en función del tiempo $P_e(t)$.

(c) Considere el operador de momento dipolar eléctrico, $d = \Delta(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|)$ (con Δ un número real con unidades de momento dipolar y cuyo valor depende del átomo), y calcule el valor medio en función del tiempo si inicialmente el átomo se encuentra en el estado excitado.

P2 **Generación de estados coherentes en una cavidad**. Considere una cavidad mono-modo de frecuencia ω_c que se encuentra inicialmente en el estado de vacío $|0\rangle$ (es decir sin fotones). La cavidad se acopla con una fuente de ondas electromagnéticas (clásicas) que oscilan con una frecuencia ω_p. El acoplamiento entre la fuente y la cavidad,

$$H_p = -\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}(t) = 2\hbar\Omega(a + a^\dagger)\cos(\omega_p t),$$

puede aproximarse bajo la aproximación de onda rotante (es decir sin términos de alta frecuencia) por

$$H_p \approx \hbar\Omega(ae^{i\omega_p t} + a^\dagger e^{-i\omega_p t}).$$

(a) Encuentre cuál es el estado cuántico del campo dentro de la cavidad después de un tiempo t. Para ello, resuelva la ecuación de Heisenberg para el operador de destrucción a, considerando primero el caso $\omega_c \neq \omega_p$. Muestre de esta forma que el estado a tiempo t es un estado coherente $|\alpha(t)\rangle$. ¿Cuál es el $\alpha(t)$ correspondiente? Para el caso resonante, $\omega_c = \omega_p$, tome el límite en el estado obtenido antes. ¿Qué obtiene? ¿Cómo es la intensidad del campo a tiempos largos? Interprete.
Ayuda: la solución de $f'(t) = -i\omega f(t) - i\Omega e^{-i\omega' t}$ es $f(t) = ce^{-i\omega t} + \frac{\Omega}{\omega' - \omega}^{-i\omega' t}$, con c una constante de integración.

(b) Calcule el valor medio de fotones en la cavidad y la probabilidad de tener cero fotones en función del tiempo. En particular, analice los valores que toman estas expresiones en el caso resonante e interprete.

(c) Finalmente, suponga que el estado inicial de la cavidad es un estado coherente $|\alpha_0\rangle$ y se acopla con el campo clásico tal como antes. Muestre entonces que el estado de la cavidad a todo tiempo es un estado coherente $|\alpha(t)\rangle$ y encuentre el valor de $\alpha(t)$.

P3 **El modelo de Jaynes–Cummings.** Considere un átomo de dos niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ cuyo Hamiltoniano puede tomarse como

$$H_A = \frac{\hbar\omega_a}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z,$$

donde $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ y $\hbar\omega_a = E_e - E_g$ es el gap entre los niveles del átomo. El átomo interactúa con un único modo del campo electromagnético cuantizado en el interior de una cavidad. El Hamiltoniano del modo de campo electromagnético es

$$H_C = \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right),$$

donde $a^\dagger$ y a son operadores de creación y destrucción de fotones. En la aproximación dipolar, la interacción entre el átomo y el campo electromagnético se reduce a una interacción entre el dipolo eléctrico del átomo ($\boldsymbol{d}$) y el campo eléctrico en la cavidad ($\boldsymbol{E}$), dada por $H_{\text{int}} = -\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}$. En la aproximación de onda rotante (*rotating wave approximation*) se desprecian los términos que oscilan rápidamente y la interacción puede aproximarse como

$$H_{\text{int}} \approx -i\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_+ \otimes a - \sigma_- \otimes a^\dagger\right),$$

donde $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ y $\sigma_- = \sigma_+^\dagger$. De esta forma, el sistema completo está descripto por el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings

$$H_{\text{JC}} = H_A + H_C + H_{\text{int}} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) - i\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_+ \otimes a - \sigma_- \otimes a^\dagger\right).$$

(a) Definimos el operador número de excitaciones como

$$N = a^\dagger a + |e\rangle\langle e|.$$

Escriba los autoestados y autovalores del operador N. ¿Están degenerados los autovalores de N? Interprete el significado de este operador.

(b) Muestre que $[N, H_{\text{JC}}] = 0$ por lo que se puede elegir una base común de autoestados (se interpreta que el número de excitaciones se conserva).

(c) Aprovechando lo anterior, muestre que el problema de diagonalizar H_{JC} se reduce al problema de diagonalizar matrices de 2×2 correspondientes a cada número de excitaciones n ($n > 0$), ¿qué se tiene en el caso de cero excitaciones?). Diagonalice el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings en cada subespacio invariante. **Ayuda.** Al ser un problema de dos estados podemos usar lo conocido para diagonalizar un sistema general de dos estados, cuyo Hamiltoniano se escribe en la base $\{|e, n-1\rangle = |+\rangle, |g, n\rangle = |-\rangle\}$ como $H_n = \hbar(a_n + \vec{b}_n \cdot \vec{\sigma})$, donde $a_n = \omega_c n$, $\vec{b}_n = \frac{\Delta}{2}\hat{z} + \frac{\Omega}{2}\sqrt{n}\hat{y}$, la desintonía es $\Delta = \omega_a - \omega_c$ y las matrices de Pauli se refieren a la base especificada.

(d) Especialice la solución exacta de los autoestados y energías para los dos siguientes límites: (i) la frecuencia de Bohr del átomo ω_a coincide con la de la cavidad ω_c (caso resonante). (ii) ambas frecuencias son muy distintas (régimen dispersivo), $|\Delta| \gg \Omega$, considerando independientemente los casos $\Delta > 0$ y $\Delta < 0$.

P4 **Emisión espontánea de un átomo en una cavidad vacía**. Considere un átomo que se encuentra en el estado excitado $|e\rangle$ que entra a una cavidad vacía (es decir sin fotones).

(a) Muestre que la probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado a un tiempo t luego de haber entrado a la cavidad es

$$P_e(t) = 1 - \frac{\Omega^2}{\Delta^2 + \Omega^2} \sin^2\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}}{2} t\right).$$

Grafique la probabilidad en función del tiempo.
Ayuda: le pueden ser útiles las identidades trigonométricas
$4\sin^2(x)\cos^2(x) = \sin^2(2x)$ y $\sin^2(x) = \tan^2(x)/(1 + \tan^2(x))$.

(b) Analice el resultado anterior en los límites de: (i) resonancia ($\Delta = 0$), y (ii) régimen dispersivo ($|\Delta| \gg \Omega$). Interprete.

P5 **Emisión estimulada de un átomo en una cavidad**. Considere un átomo que se encuentra en el estado excitado $|e\rangle$ que entra a una cavidad con n fotones. Suponga además que la interacción entre el átomo y la cavidad es resonante. Calcule la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado en función del tiempo y compare con lo obtenido en el problema anterior para el caso de la cavidad vacía. Para tiempos cortos, ¿cómo se ve afectada la probabilidad de decaer del átomo en función del número de fotones en la cavidad?

P6 **Interacción de un átomo con el campo de una cavidad**. Considere un átomo en el nivel excitado $|e\rangle$ que entra en una cavidad mono-modo con un campo en el estado $|\phi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$. Suponga además que la interacción del átomo con el modo del campo es resonante.

(a) Calcule el estado del átomo y cavidad a un tiempo t posterior. Calcule además la probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado $|e\rangle$ en función del tiempo y muestre que se obtiene

$$P_e(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cos\left(\sqrt{n+1}\Omega t\right)\right],$$

donde $P(n) = |c_n|^2$ (¿qué es esto físicamente?). Discuta cómo midiendo $P_e(t)$ puede inferir el valor de la distribución de probabilidades $P(n)$ del estado inicial de la cavidad.

(b) Especialice la expresión anterior para el caso en que el estado inicial de la cavidad es un estado coherente $|\alpha\rangle$. Evalúe y grafique el resultado numéricamente para distintos valores de $|\alpha|^2$ (tome por ejemplo distintos valores del orden de $|\alpha|^2 \sim 10$), y para distintos valores de la constante de acoplamiento Ω. Verifique que se tienen oscilaciones de $P_e(t)$ que colapsan y luego reviven. Más aún, verifique que: (i) las oscilaciones tienen un período aproximadamente

$$T_{\text{osc}} \sim \frac{2\pi}{\sqrt{\langle n\rangle}\Omega},$$

(especialmente para $|\alpha|^2$ grande; ¿cómo podría justificar esto analíticamente?), donde $\langle n\rangle$ es el valor medio de fotones en el estado coherente inicial del campo; (ii) el tiempo característico del colapso de las oscilaciones es del orden

$$T_{\text{colapso}} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\Omega},$$

(iii) y finalmente que el tiempo característico para que revivan las oscilaciones es

$$T_{\text{revival}} \sim \frac{4\pi}{\Omega}\sqrt{\langle n\rangle}.$$

P7 **Evolución del momento dipolar atómico**. Considere el momento dipolar del átomo, que está dado por el operador $d = d_0(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$ (con d un número real con unidades de momento dipolar cuyo valor depende del átomo y niveles $|e\rangle$, $|g\rangle$ particulares). Calcule el valor medio del momento dipolar del átomo en función del tiempo si inicialmente el átomo se encuentra en el estado excitado en las siguientes situaciones

(a) La cavidad inicialmente tiene n fotones.

(b) La cavidad inicialmente se encuentra en un estado coherente $|\alpha\rangle$ y además estamos en la condición de resonancia ($\Delta = 0$).

Compare los resultados obtenidos en este problema y en los problemas anteriores sobre la probabilidad de encontrar el átomo excitado con los resultados análogos del problema de Rabi, donde el campo se trata clásicamente. ¿Cómo se comparan las probabilidades de decaer del átomo en las distintas situaciones? Por otro lado, ¿cómo cambian los valores medios del momento dipolar entre los distintos modelos y estados de la cavidad?

P8 **Hamiltoniano efectivo dispersivo de Jaynes–Cummings**. Considere el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings en el régimen dispersivo (ver problema **P3**).

(a) Muestre que en este límite, el Hamiltoniano se puede reducir a un Hamiltoniano efectivo dado por

$$H_{\text{eff}} = H_A + H_C + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z \otimes \left(a^\dagger a + 1\right) = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z \otimes \left(a^\dagger a + 1\right).$$

Interprete.

(b) Muestre que $[\sigma_z, H_{\text{eff}}] = 0$, $\left[a^\dagger a, H_{\text{eff}}\right] = 0$ y $\left[\sigma_z, a^\dagger a\right] = 0$. ¿Qué significa esto?

(c) Suponga que el sistema se encuentra en un autoestado del Hamiltoniano. Muestre entonces que midiendo la frecuencia del modo en la cavidad se puede inferir el estado del átomo. A su vez, muestre que midiendo el estado del átomo se puede inferir el número de fotones en la cavidad.

(d) Suponga que inicialmente la cavidad de encuentra en un estado coherente $|\alpha\rangle$ y el átomo entra a la cavidad en el estado $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$. Calcule el estado del sistema a un tiempo t posterior. Interprete. Calcule además la matriz densidad reducida del átomo en función del tiempo y verifique que se tiene un estado entrelazado entre el átomo y el campo de la cavidad.

P9 **Preparación de estados de Bell entre dos átomos.** A continuación veremos cómo generar los cuatro estados de Bell entre dos átomos distantes, usando la interacción de los átomos con una cavidad mono-modo. Para ello necesitaremos tres átomos iguales: dos átomos (A_1 y A_2) que entrelazaremos en un estado de Bell, más un átomo auxiliar (A_0). Utilizaremos además una cavidad mono modo ideal y dos aparatos idénticos (R_A y R_B) que pueden aplicar pulsos $\pi/4$ a los átomos antes (R_A) y después (R_B) de su pasaje por la cavidad. En estas zonas (zonas de Ramsey) los átomos interactúan con campos de radiofrecuencia clásicos e intensos. Supondremos que esta interacción es tal que el operador de evolución temporal, que actúa sobre el estado del átomo que atraviesa la zona de Ramsey, es (ver problema **P1**)

$$U_R = \cos(\Omega T)\mathbb{I} - i\sin(\Omega T)\sigma_y,$$

con $\Omega T = \pi/4$, y T el tiempo de permanencia del átomo en dicha zona.

Para formar los distintos estados de Bell realizaremos cuatro experimentos distintos, que llamaremos $e-e$, $e-g$, $g-e$ y $g-g$. En el primero, los átomos A_0 y A_1 son preparados en los estados $|e\rangle_0$ y $|e\rangle_1$; y análogamente para los otros. En los cuatro experimentos inicialmente la cavidad se prepara en el estado de vacío $|0\rangle$ y el estado del átomo A_2 es $|g\rangle_2$. Luego, para cada uno de los cuatro experimentos analice en detalle la siguiente secuencia de operaciones.

(a) Se hace pasar el átomo A_0 por el aparato R_A. Diga cual es el estado de A_0 a la salida de R_A.

(b) Luego se hace pasar el átomo A_0 por la cavidad. La cavidad está sintonizada para resonar con A_0 (la desintonía es $\Delta_0 = \omega_{a_0} - \omega_c = 0$). Determine el mínimo tiempo de interacción tal que el estado final del átomo es $|g\rangle_0$. ¿Cuál es el estado del campo en la cavidad luego de la interacción con A_0?

(c) Se envía el segundo átomo A_1 a través del aparato R_A. ¿Cuál es el estado de A_1 al salir de R_A?

(d) El átomo A_1 pasa por la cavidad e interactúa con el campo en forma no resonante (dispersiva, con alta desintonía) de modo tal acumular una fase $\pi/2$ en los estados con un fotón. Diga cuál es el estado del sistema A_1–campo luego de esta interacción.

(e) A continuación se hace pasar al átomo A_1 por un aparato R_B. Diga cuál es el estado del sistema A_1–campo después de esta etapa.

(f) Por último, se prepara un tercer átomo A_2 en su estado $|g\rangle_2$. Se envía ese átomo por la cavidad de modo tal que la interacción es resonante. El tiempo de interacción es tal que el operador de evolución en esta etapa transforma al estado $|g\rangle_3 \otimes |1\rangle_C$ en el estado $|e\rangle_3 \otimes |0\rangle_C$. Diga cuál es el estado del sistema formado por los átomos A_1, A_2 y el campo. ¿Cuál es el estado del sistema A_1–A_2? ¿Cuál es el estado del campo en la cavidad?

Verifique que en cada uno de los cuatro experimentos mencionados se prepara un estado de Bell distinto entre los átomos A_1 y A_2. Diga cuál corresponde a cada caso.