lunes, 15 de abril de 2024 09:59

PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE GENERALIZADO DE HEISENBERG

$$\Delta A \, \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

$$\hat{A} = \hat{x}, \ \hat{B} = \hat{p} \longrightarrow \Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$$

P10 **Incerteza mínima y paquetes Gaussianos.** Decimos que un estado $|\psi\rangle$ es un paquete Gaussiano si su función de onda es de la forma

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}} \exp\left[\frac{ip_0 x}{\hbar}\right] \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}\right],$$

donde $x_0, p_0, \sigma_x \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que la densidad de probabilidad en x es una densidad de probabilidad normal con valor medio x_0 y desviación estándar σ_x.

→ Tenemos el paquete de ondas gaussiano:

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}} e^{\frac{iP_0 x}{\hbar}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}}$$

onda plana

modulación gaussiana

→ Calculamos lo que nos piden de dos formas:

1. Comparamos directamente con una distribución gaussiana:

- Una función de distribución normal tiene la siguiente forma funcional

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

donde $\begin{cases} \mu: \text{valor medio} \\ \sigma: \text{desviación estándar} \end{cases}$

- La densidad de probabilidad en x la podemos calcular como:

$$P(x) = \psi^*(x)\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (2)$$

- Comparando (1) y (2), ambos tienen la misma forma y entonces podemos identificar

valor medio: $\mu = x_0$

desviación estándar: $\sigma = \sigma_x$

2. Calculamos directamente valor medio y desviación estándar

- Valor medio:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \psi^*(x) \, x \, \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, |\psi(x)|^2 x = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$u = x - x_0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} du \, (u + x_0) e^{-\frac{u^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \left(0 + x_0\sqrt{2\pi\sigma_x^2}\right) = x_0$$

- Desviación estándar $\sigma = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \psi^*(x)(x-x_0)^2 \psi(x) = \cdots = \sigma_x$$

(b) Verifique que la densidad de probabilidad en p, $|\langle p|\psi\rangle|^2 = |\psi(p)|^2$ es una densidad normal con valor de expectación p_0 y desviación estándar $\sigma_p = \hbar/(2\sigma_x)$.

→ Primero buscamos la función de onda en la representación de momento

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \mathcal{F}[\psi(x)]\left(\frac{p}{\hbar}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}} \mathcal{F}\left[e^{\frac{iP_0 x}{\hbar}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}}\right] \longrightarrow \text{Usamos la ayuda: } \mathcal{F}[f(x)e^{iax}](k) = \mathcal{F}[f(x)](k-a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}}\right]\left(\frac{P-P_0}{\hbar}\right) \longrightarrow \text{Usamos la ayuda: } \mathcal{F}[f(x-a)](k) = e^{ika} \mathcal{F}[f(x)](k)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}} e^{-\frac{iPx_0}{\hbar}} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}}\right]\left(\frac{P-P_0}{\hbar}\right) \longrightarrow \text{Usamos la ayuda: } \mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} \quad \text{con } \alpha = \frac{1}{4\sigma_x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}} e^{-\frac{iPx_0}{\hbar}} \sqrt{\frac{4\sigma_x^2}{2}} e^{-\frac{(P-P_0)^2}{\hbar} \frac{4\sigma_x^2}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\sigma_x}{(2\pi\sigma_x^2\hbar^2)^{1/4}} e^{-\frac{iPx_0}{\hbar}} e^{-(P-P_0)^2 \cdot \frac{\sigma_x^2}{\hbar^2}}$$

→ Definiendo $\sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma_x}$:

$$\psi(p) = \sqrt{2} \frac{\cancel{\hbar}}{2\sigma_p} \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \left(\frac{4\sigma_p^2}{\cancel{\hbar^4}}\right)^{1/4} e^{-\frac{iPx_0}{\hbar}} e^{-\frac{(P-P_0)^2}{4\sigma_p^2}}$$

$$= \frac{}{(2\pi)^{1/4}} \left(\frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^4}\right)^{1/4} \left(\cancel{\frac{2^2 \cdot 2^2}{2^4}}\right)^{1/4} e^{-\frac{iPx_0}{\hbar}} e^{-\frac{(P-P_0)^2}{4\sigma_p^2}}$$

$$\boxed{\psi(p) = \frac{1}{(2\pi\sigma_p^2)^{1/4}} e^{-\frac{iPx_0}{\hbar}} e^{-\frac{(P-P_0)^2}{4\sigma_p^2}}} \rightarrow \text{es otra gaussiana!}$$

→ La densidad de probabilidad resulta: $\boxed{P(p) = |\psi(p)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} e^{-\frac{(P-P_0)^2}{2\sigma_p^2}}}$

(c) Usando lo anterior verifique que el paquete de onda Gaussiano satisface la relación de incerteza posición–momento mínima $\mathrm{Sdv}(x)\,\mathrm{Sdv}(p) = \hbar/2$, donde $\mathrm{Sdv}(\cdot) = \sqrt{\mathrm{Var}(\cdot)}$ es la desviación estándar.

→ La relación de incerteza es:

$$\sigma_x\sigma_p = \sigma_x \cdot \frac{\hbar}{2\sigma_x} = \frac{\hbar}{2} \rightarrow \text{es la mínima relación de incerteza!}$$

(d) Muestre que la condición necesaria para tener incerteza mínima, $\Delta x\,|\psi\rangle = c\Delta p\,|\psi\rangle$, con $\Delta x = x - \langle x\rangle$, análogamente para Δp y c imaginario, se satisface.

→ Hay que mostrar que se satisface: $\Delta x|\psi\rangle = c\,\Delta p|\psi\rangle$ con $\Delta x = x - \langle x\rangle$ y $\Delta p = p - \langle x \rangle$, $c \in \mathbb{C}$.

lo hacemos en la representación de posición xq sabemos cómo actúan x y p

- $\langle x|\Delta x|\psi\rangle = \langle x|(x - \langle x\rangle)|\psi\rangle = x\psi(x) - x_0\psi(x) = (x - x_0)\psi(x)$
- $\langle x|\Delta p|\psi\rangle = \langle x|(p - \langle p\rangle)|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) - P_0\psi(x) = -i\hbar\left(\frac{iP_0}{\cancel{\hbar}} - \frac{2(x-x_0)}{4\sigma_x}\right)\psi(x) - \cancel{P_0}\psi(x)$

$$= \frac{i\hbar}{2\sigma_x^2}(x - x_0)\psi(x)$$

$p = -i\hbar\frac{d}{dx}$

→ Comparando ambos resultados:

$$\langle x|\Delta x|\psi\rangle = \frac{i\hbar}{2\sigma_x^2}\langle x|\Delta p|\psi\rangle$$

y como $\{|x\rangle\}$ es una base completa → $\boxed{\Delta x|\psi\rangle = c\,\Delta p|\psi\rangle}$

(e) Finalmente, partiendo de la condición necesaria para tener un paquete de incerteza mínima $\Delta x\,|\psi\rangle = c\Delta p\,|\psi\rangle$, demuestre que todo estado $|\psi\rangle$ que satisface esta condición es necesariamente un paquete de onda Gaussiano.

→ Partimos desde la condición:

$$\langle x|\Delta x|\psi\rangle = c\langle x|\Delta p|\psi\rangle$$

$$(x - \langle x\rangle)\psi(x) = c\left(-i\hbar\frac{d}{dx} - \langle p\rangle\right)\psi(x)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\langle p\rangle}{i\hbar}\psi - \frac{x}{ci\hbar}\psi + \frac{\langle x\rangle}{i\hbar c}\psi$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{i\hbar c}(x_0 - cP_0 - x)\psi \Rightarrow \boxed{\psi(x) = Ae^{-\frac{i}{c\hbar}\left[(x_0 - cP_0)x - \frac{x^2}{2}\right]}} \rightarrow \text{gaussiana!}$$