Física Teórica 2 - Guía 1: Dimensión 2

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

16 de marzo de 2022

1. Breve introducción: Polarización de fotones

Dada la dirección de propagación de una onda electromagnética (por ejemplo dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$), debido al carácter transversal de dichas onda los campos eléctricos y magnéticos oscilan en un plano perpendicular (plano $x-y$). En realidad el campo magnético es siempre ortogonal al campo eléctrico, y está determinado por este de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell. Se denomina polarización de la onda a la forma en que oscila el campo eléctrico

$$E(\boldsymbol{r},t) = \text{Real}\left((E_{0x}\hat{\boldsymbol{x}} + E_{0y}\hat{\boldsymbol{y}})e^{ikz-i\omega t}\right)$$

donde hacemos uso de las amplitudes complejas $\{E_{0x}, E_{0y}\}$. Una magnitud de interés es el valor medio temporal de la intensidad de la luz, que se calcula y es proporcional a

$$\langle I\rangle \sim |E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2$$

donde $|E_{0x}|$ y $|E_{0y}|$ son los módulos complejos. Podemos caracterizar la evolución del campo eléctrico con el vector bidimensional en el plano complejo:

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix}$$

donde usual elegir que esta magnitud esté normalizada a 1:

$$\boldsymbol{\psi}^{t*} \cdot \boldsymbol{\psi} = |E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2 = 1$$

expresión que define el producto escalar hermitiano.

Podemos ver que a menos de una fase global que depende de la elección del origen del tiempo, la evolución del campo eléctrico en un dado punto del espacio, depende de la fase y amplitudes relativas de los complejos $E_{0x} = |E_{0x}|e^{i\varphi_x}$ y $E_{0y} = |E_{0y}|e^{i\varphi_y}$, por ejemplo:

- Si $\varphi_y - \varphi_x$ es 0 o $\pm\pi$, el campo eléctrico oscilará en una recta, por lo que se denomina a este estado, luz linealmente polarizada.
- Si $\varphi_y - \varphi_x = \pm\pi/2$ y adicionalmente $|E_{0x}| = |E_{0y}|$, el campo eléctrico rotará en círculo. Se denomina circular derecha (R) si $\varphi_y - \varphi_x = \pi/2$ y circular izquierda si $\varphi_y - \varphi_x = -\pi/2$ (usamos la convención de física de partículas).

Hay un formalismo clásico en el cual los procesos de medición se adjudican a operadores lineales, por ejemplo usar un polarizador en la dirección $\hat{x}$ lleva a un transformación que deja sólo la componente a lo largo de $\hat{y}$. Es fácil ver cual es la matriz que representa esta operación.

Un tránsito a la mecánica cuántica se da si la intensidad de la luz se hace cada vez mas tenue. Se observa que la luz está formada por fotones, cada uno transportando una energía $\hbar\omega$, un momento lineal $\hbar\boldsymbol{k}$, etc. El estado de polarización está dado por un vector complejo de dimensión 2, normalizado tal que $|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2$=1 (donde $||$ es el módulo complejo). Esta norma apropiada para vectores complejos surge naturalmente de la fórmula de intensidad media temporal, y se corresponde con un producto interno hermitiano.

En dicho espacio vectorial, podemos definir un estado de polarización general en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, llamada también a veces horizontal (vertical), $H(V)$ usando notación de *ket* para el vector:

$$|\psi\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta e^{i\varphi}\,|y\rangle$$

Podemos definir diferentes bases ortonormales, $\{|x\rangle \equiv |H\rangle\,, |y\rangle = |V\rangle\}$, $\{|x'\rangle\,, |y'\rangle\}$ y $\{|R\rangle\,, |L\rangle\}$, correspondientes a polarización lineal en los ejes x e y, polarización lineal en los ejes x' e y' (rotados un ángulo θ respecto de x e y) y polarización circular (derecha e izquierda). En términos de la polarización $\{|x\rangle\,, |y\rangle\}$ las otras bases se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
|x'\rangle &= \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle\,, & |y'\rangle &= -\sin\theta\,|x\rangle + \cos\theta\,|y\rangle\,, & \\
|D\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |y\rangle), & |A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - |y\rangle), & \text{caso } \theta = \pi/4 \\
|R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|y\rangle\,, & |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|x\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\,|y\rangle\,. &
\end{aligned}$$

Para medir la polarización debemos filtrar los fotones en sus dos componentes de polarización, al estilo hecho por el aparato de Stern Gerlach. Para ello se usa los llamados Polarizing Beam Splitter (PBS, separador de polarización de un haz), como vieron en la teórica. Daremos por cierto la existencia experimental de tales BPS para todo par de bases usadas:

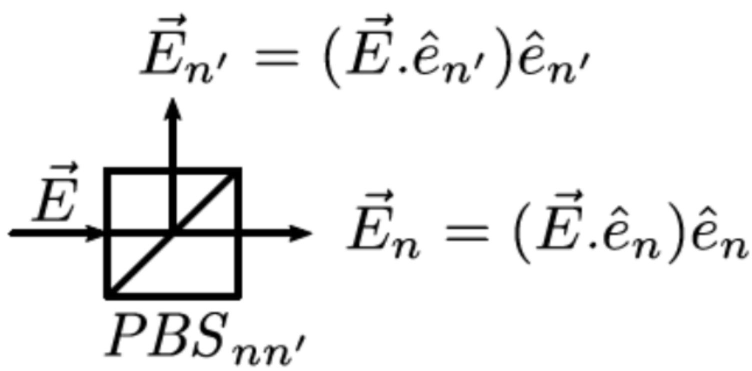

Figura 1: *Divisor de polarización de haz en las direcciones* $\hat{\boldsymbol{n}}$ *y* $\hat{\boldsymbol{n}}'$ $PBS_{\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}'}$

En la teórica vieron que en la base $\{|H\rangle\,, |V\rangle\}$ este es el equivalente del experimento de Stern Gerlach básico que mide $\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}$. Las bases $\{|D\rangle\,, |A\rangle\}$ juegan el rol de los autoestados de $\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}$, y las bases $\{|R\rangle\,, |L\rangle\}$, el rol de los autoestados de $\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}$ en Stern Gerlach.

2. Problema 9

Muestre que el estado $|\psi\rangle = \frac{(1+i)}{2}|R\rangle + \frac{(1-i)}{2}|L\rangle$ tiene polarización lineal de las siguientes maneras:

a) Multiplique por $\langle x'|$ y encuentre para qué valor de θ, $\langle x'|\psi\rangle = 1$.

b) Utilizando la matriz cambio de base, escriba $|\psi\rangle$ en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$.

a) Para multiplicar (proyectar) sobre $|x'\rangle$, calculemos el estado transpuesto conjugado (bra):

$$\langle x'| = |x'\rangle^\dagger = (\cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle)^\dagger = \cos\theta\,\langle x| + \sin\theta\,\langle y|) := (\cos\theta, \sin\theta)$$

entonces proyectamos:

$$\begin{aligned}
\langle x'|\psi\rangle &= \cos\theta\,\langle x|\psi\rangle + \sin\theta\,\langle y|\psi\rangle \\
&= \cos\theta\frac{1+i}{2}\underbrace{\langle x|R\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \cos\theta\frac{1-i}{2}\underbrace{\langle x|L\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \sin\theta\frac{1+i}{2}\underbrace{\langle y|R\rangle}_{\frac{i}{\sqrt{2}}} + \sin\theta\frac{1-i}{2}\underbrace{\langle y|L\rangle}_{-\frac{i}{\sqrt{2}}} \\
&= \cos\theta\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}} - \sin\theta\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}} \\
&= \cos\theta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} \\
&= \cos\Big(\theta + \frac{\pi}{4}\Big) = 1
\end{aligned}$$

de la última igualdad obtenemos:

$$\theta + \frac{\pi}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

como $\langle x'|\psi\rangle = 1$, entonces $|\psi\rangle = |x'\rangle$. Reemplazando $\theta = \frac{\pi}{4}$ en $|x'\rangle$ el estado es:

$$|\psi\rangle \equiv |A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - |y\rangle)$$

Concluimos que $|\psi\rangle$ es linealmente polarizado, y además es un estado polarizado antidiagonalmente.

b) Busquemos expresar el estado $|\psi\rangle$ directamente en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, expresando $|\psi\rangle$ como suma de sus componentes en $|x\rangle$ e $|y\rangle$:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= |x\rangle\,\langle x|\psi\rangle + |y\rangle\,\langle y|\psi\rangle \\
&= |x\rangle\left(\frac{1+i}{2}\underbrace{\langle x|R\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1-i}{2}\underbrace{\langle x|L\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + |y\rangle\left(\frac{1+i}{2}\underbrace{\langle y|R\rangle}_{\frac{i}{\sqrt{2}}} + \frac{1-i}{2})\underbrace{\langle y|L\rangle}_{-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - |y\rangle)
\end{aligned}$$

es linealmente polarizado con el ángulo obtenido en a).