Física Teórica 2 - Guía 2: Formalismo

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

8 de abril de 2022

1. Problema 13 (b)

- B tal que $B^3 = B$. Para dar un ejemplo veamos que:

$$B^3 - B = B(B + \mathbb{I})(B - \mathbb{I}) = 0$$

por lo que los autovalores de B deben satisfacer (en la base que lo diagonaliza):

$$\lambda_i^3 - \lambda_i = \lambda_i(\lambda_i + 1)(\lambda_i - 1) = 0$$

(Teorema de Cayley-Hamilton). En este caso, los autovalores λ_i pueden ser $\lambda_i = +1, 0, -1$. Esto corresponde al spin 1 (en unidades de $\hbar$): $B = S_k/\hbar,\ k = 1.,3.$

- Podemos listar las potencias de B:

$$B^0 = \mathbb{I} \quad B^1 = B \quad B^2 = B^2 \quad B^3 = B \quad B^4 = B^2 \quad B^5 = B, ...$$

De donde deducimos que solo hay tres valores para todas las potencias de B:

$$B^0 = \mathbb{I} \qquad B^{2n-1} = B \qquad B^{2n} = B^2 \qquad n = 1, 2, ...$$

Dada una función $f(x)$ cualquiera podemos extraer las parte de potencia x^0, la parte de potencias impares x^{2n-1} y la parte de potencias pares x^{2n}:

$$f(x) - f(0) = \underbrace{[\frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) - f(0)]}_{parte\ par} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)}_{parte\ impar}$$

Cuando $x = \alpha B$, las potencias de x son: $(\alpha B)^0 = \mathbb{I}$, $\quad (\alpha B)^{2n-1} = \alpha^{2n-1}B$, $(\alpha B)^{2n} = \alpha^{2n}B^2$ por lo que la parte operatorial se factoriza de la serie de potencias de las partes par e impar, por consiguiente:

$$f(\alpha B) = f(0)\mathbb{I} + \underbrace{[\frac{1}{2}\left(f(\alpha) + f(-\alpha)\right) - f(0)]}_{parte\ par} B^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(\alpha) + f(-\alpha)\right) B}_{parte\ impar}$$

Si $f(-i\alpha B) = e^{-i\alpha B}$, usamos $\alpha \to -i\alpha$ y se obtiene el valor correcto:

$$\boxed{e^{-i\alpha B} = \mathbb{I} + \left(\cos(\alpha) - 1\right) B^2 - i\sin(\alpha) B}$$