Física Teórica 2 - Guía 3: Sistemas Compuestos

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

21 de abril de 2024

1. Breve resumen: Sistemas Compuestos

En Mecánica Clásica un sistema compuesto, por ejemplo por dos o más partículas, sólo requiere adjuntar para su descripción correcta, las coordenadas y momentos de las partículas que lo conforman. En Mecánica Cuántica, cada partícula (o subsistema) tiene asociado un espacio de Hilbert, por ejemplo para dos partículas: $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$, conteniendo los estados de cada una de ellas, por ejemplo $|\psi\rangle_A$ y $|\phi\rangle_B$. Estos estados se describen con sus respectivas bases ortonormales $\{|u_i\rangle_A\}$ y $\{|v_j\rangle_B\}$, $i = 1, .., D_A$ y $j = 1, .., D_B$.

Una primera descripción del conjunto $A - B$ se obtiene simplemente generando un nuevo espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ que contiene todos los pares de estados, $|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$. Esta notación denota lo que se llama un producto tensorial de espacios vectoriales (no asustarse con el nombre, se define por sus propiedades).

El nuevo espacio vectorial $\mathcal{H}_{AB}$ posee todas la propiedades de un espacio de Hilbert, en particular que la combinación lineal de estados pertenecen a dicho espacio. Por ello concluimos que no todos los estados en $\mathcal{H}_{AB}$ son estados producto, en realidad estos estados son una clara minoría en $\mathcal{H}_{AB}$.

Una base de estados ortonormales de $\mathcal{H}_{AB}$ se obtiene con el producto tensorial de las bases: $\{|u_i\rangle_A \otimes |v_j\rangle_B\}$. El producto interno en este espacio es el mismo producto interno antihermitiano. Dados $\Psi_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$ y $\Phi_{AB} = |\xi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$, el producto interno se define por:

$$\boxed{\langle\Phi|\Psi\rangle_{AB} = \langle\xi|_A \otimes \langle\chi|_B\, |\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B = \langle\xi|\psi\rangle_A \langle\chi|\phi\rangle_B}$$

Los primeros operadores en este espacio son los definidos en cada subsistema y extendidos al conjunto: $O_A \otimes \mathbb{I}$ y $\mathbb{I} \otimes R_B$, cuyo producto da lugar a un operador producto mas general $(O_A \otimes \mathbb{I}_B)(\mathbb{I}_A \otimes R_B) = O_A \otimes R_B$, cuya acción sobre un estado producto está definido por:

$$\boxed{O_A \otimes R_B(|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B) = O_A\,|\psi\rangle_A \otimes R_B\,|\phi\rangle_B}$$

Claramente no todos los operadores son producto dado que la suma de operadores es también un operador.

La representación matricial de estados del sistema AB en una base ortonormal, como siempre requiere un ordenamiento bien definido. En el caso de la base producto, se tomará el primer ket de la base del susbsistema A multiplicada por cada elemento de la base del subsistema B, el procedimiento continua con cada ket de la base del subsistema A. Es claro que habra $D_a \times D_B$ estados en la base producto, por lo que esta es la dimensión del espacio de $\mathcal{H}_{AB}$. Por ejemplo si $|\psi\rangle_A = \sum_i c_i\,|u_i\rangle_A$ y $|\phi\rangle_B = \sum_j d_j\,|v_j\rangle_B$, entonces

$$\boxed{|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B = \sum_i c_i\,|u_i\rangle_A \otimes \sum_j d_j\,|v_j\rangle_B = \sum_i c_i \sum_j d_j\,|u_i\rangle_A \otimes |v_j\rangle_B}$$

por lo que la representación matricial de producto tensorial de estados es:

$$|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B := \begin{pmatrix} c_1 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ d_{D_A} \end{pmatrix} \\ c_2 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ d_{D_A} \end{pmatrix} \\ . \\ . \\ c_{D_1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ d_{D_A} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 d_1 \\ c_1 d_2 \\ . \\ c_1 d_{D_B} \\ c_2 d_1 \\ c_2 d_2 \\ . \\ c_2 d_{D_B} \\ . \\ . \\ c_{D_1} d_1 \\ c_{D1} d_2 \\ . \\ c_{D1} d_{D_B} \end{pmatrix}$$

La representación matricial de cada operador en un dado subsistema viene de su representación en ketbra, por ejemplo $O_A = \sum_{ik} O_{ik} |u_i\rangle\langle u_k|_A$, y $R_B = \sum_{jl} R_{jl} |v_j\rangle\langle v_l|_B$, por lo que el producto tensorial se obtiene distribuyendo de una manera ordenada:

$$\boxed{O_A \otimes R_B = (\sum_{ik} O_{ik} |u_i\rangle\langle u_k|) \otimes (\sum_{jl} R_{jl} |v_i\rangle\langle v_l|) = \sum_{ik} O_{ik} \sum_{jl} R_{jl} |u_i\rangle_A \otimes |v_j\rangle_B \langle u_k|_A \otimes \langle v_l|_B}$$

de donde podemos escribir la representación matricial:

$$O_A \otimes R_B := \begin{pmatrix} O_{11} R_B & O_{12} R_B & ... & O_{1D_A} R_B \\ O_{21} R_B & O_{22} R_B & ... & O_{1D_A} R_B \\ . & . & ... & . \\ O_{D_A 1} R_B & O_{D_A 2} R_B & ... & O_{D_A D_A} R_B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} O_{11} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & .. & R_{1D_B} \\ R_{21} & R_{22} & .. & R_{2\,D_B} \\ . & . & .. & . \\ R_{D_B\,1} & R_{D_B\,2} & .. & R_{D_B\,D_B} \end{pmatrix} & O_{12} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & .. & R_{1D_B} \\ R_{21} & R_{22} & .. & R_{2\,D_B} \\ . & . & .. & . \\ R_{D_B\,1} & R_{D_B\,2} & .. & R_{D_B\,D_B} \end{pmatrix} & ... \\ O_{21} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & .. & R_{1D_B} \\ R_{21} & R_{22} & .. & R_{2\,D_B} \\ . & . & .. & . \\ R_{D_B\,1} & R_{D_B\,2} & .. & R_{D_B\,D_B} \end{pmatrix} & O_{22} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & .. & R_{1D_B} \\ R_{21} & R_{22} & .. & R_{2\,D_B} \\ . & . & .. & . \\ R_{D_B\,1} & R_{D_B\,2} & .. & R_{D_B\,D_B} \end{pmatrix} & ... \\ . & . & ... \\ . & . & ... \\ . & . & ... \\ O_{D_A\,1} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & .. & R_{1D_B} \\ R_{21} & R_{22} & .. & R_{2\,D_B} \\ . & . & .. & . \\ R_{D_B\,1} & R_{D_B\,2} & .. & R_{D_B\,D_B} \end{pmatrix} & O_{D_A\,2} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & .. & R_{1D_B} \\ R_{21} & R_{22} & .. & R_{2\,D_B} \\ . & . & .. & . \\ R_{D_B\,1} & R_{D_B\,2} & .. & R_{D_B\,D_B} \end{pmatrix} & ... \end{pmatrix}$$

donde luego de multiplicar por las matrices internas se sacan los paréntesis internos.

Una propiedad importante es la traza del producto tensorial:

$$\boxed{tr(O_A \otimes R_B) = (\sum_i O_{ii} (\sum_j R_{jj})) = (\sum_i O_{ii})(\sum_j R_{jj}) = tr(O_A) tr(R_B)}$$

En sistemas de 2×2 la traza es nula siempre que $O_A = \sigma_i^A$ o $R_B = \sigma_j^B$, donde σ_k son las matrices de Pauli, que son de traza nula.

$$\boxed{tr(\sigma_i^A \otimes R_B) = tr(O_A \otimes \sigma_j^B) = 0}$$

2. Problema 12

Base producto y base de Bell. Considere un sistema compuesto de dos partes, que denotamos A y B, cada una de las cuales tiene un espacio de estados de dimensión 2. Sea $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ una base ortonormal de estados de A y $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ análogamente para B. Asimismo, sean σ_i^A y σ_i^B $(i = x, y, z)$ observables sobre cada uno de los subsistemas, cuyas representaciones matriciales en estas bases están dadas por las matrices de Pauli, de forma tal que $|0\rangle_A$ y $|1\rangle_A$ son autoestados de σ_z^A con autovalor $+1$ y -1, respectivamente (y análogamente para B).

(a) Considere el conjuntos de observables sobre el sistema compuesto: $\left\{\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B, \mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B\right\}$. Muestre que forman conjunto completo de observables que conmutan y encuentre una base común de autoestados. ¿Qué propiedad satisfacen los elementos de esta base?

(b) Considere el conjuntos de observables sobre el sistema compuesto: $\left\{\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B, \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B\right\}$. Muestre que forman conjunto completo de observables que conmutan y encuentre una base común de autoestados. ¿Qué propiedad satisfacen los elementos de esta base?

(c) Considere los operadores $\sigma_x^A \otimes \sigma_z^B$ y $\sigma_z^A \otimes \sigma_x^B$. Diga si forman un CCOC y en ese caso encuentre la base comun de autoestados.

(a) Para probar que son CCOC debemos primero ver que conmuten entre sí:

$$\begin{aligned}
[\sigma_z^A \mathbb{I}^B, \mathbb{I}^A \sigma_z^B] &= (\sigma_z^A \mathbb{I}^A) \otimes (\mathbb{I}^B \sigma_z^B) - (\mathbb{I}^A \sigma_z^A) \otimes (\sigma_z^B \mathbb{I}^B) \\
&= \sigma_z^A \otimes \sigma_z^B - \sigma_z^A \otimes \sigma_z^B = 0
\end{aligned}$$

Consideremos la base producto: $\{|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\}$. Usaremos la notación simplificada por la cual por ejemplo: $|00\rangle \equiv |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$, $|01\rangle \equiv |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B$, etc. La base producto es un una base de autoestado de ambos operadores, con autovalores doblemente degenerados. Cada operador no es en si mismo un CCOC. Usando

$$\sigma_z |0\rangle = +|0\rangle \qquad \sigma_z |1\rangle = -|1\rangle$$

y que por ejemplo,

$$\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B |00\rangle = \sigma_z^A |0\rangle \otimes \mathbb{I}^B |0\rangle = +|00\rangle, ...$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B |00\rangle &= +|00\rangle & \qquad \mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B |00\rangle &= +|00\rangle \\
\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B |01\rangle &= +|01\rangle & \qquad \mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B |01\rangle &= -|01\rangle \\
\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B |10\rangle &= -|10\rangle & \qquad \mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B |10\rangle &= +|10\rangle \\
\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B |11\rangle &= -|11\rangle & \qquad \mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B |11\rangle &= -|11\rangle
\end{aligned}$$

Podemos observar que cada estado de la base es autoestado común de ambos operadores y está identificado en forma unívoca por los autovalores correspondientes, por lo cual forman un Conjunto Completo de Observables que Conmutan (CCOC).

Operadores/Autovalores		
Estados de la base	$\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B$	$\mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B$
$\|00\rangle$	+1	+1
$\|00\rangle$	+1	-1
$\|00\rangle$	-1	+1
$\|00\rangle$	-1	-1

—vskip 0.5 cm

(b) Para probar que son CCOC debemos primero ver que conmuten entre sí:

$$
\begin{aligned}
[\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B, \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B] &= (\sigma_z^A \sigma_x^A) \otimes (\sigma_z^B \sigma_x^B) - (\sigma_x^A \sigma_z^B) \otimes (\sigma_x^A \sigma_z^B) \\
&= (i\sigma_y^A) \otimes (i\sigma_y^B) - (-i\sigma_y^A) \otimes (-i\sigma_y^B) = 0
\end{aligned}
$$

Consideremos la acción de estos operadores sobre la base producto. Usando

$$\sigma_x |0\rangle = +|1\rangle \qquad \sigma_x |1\rangle = +|0\rangle$$

se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B |00\rangle &= +|00\rangle & \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B |00\rangle &= +|11\rangle \\
\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B |11\rangle &= +|11\rangle & \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B |11\rangle &= +|00\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B |01\rangle &= -|01\rangle & \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B |01\rangle &= +|10\rangle \\
\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B |10\rangle &= -|10\rangle & \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B |10\rangle &= +|01\rangle
\end{aligned}
$$

Podemos observar en cada grupo que $\{|0,0\rangle, |11\rangle\}$ y $\{|01\rangle, |10\rangle\}$ forman subespacios invariantes de ambos operadores. Basta diagonalizar en ambos subespacios para obtener los autovectores y autovalores comunes. En cada subespacio basta diagonalizar $\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B$, pues en dicho subespacio $\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B$ es proporcional a la identidad. Claramente, en cada subespacio $\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B$ actúa como σ_x del problema 2×2, por lo que los autovectores correspondientes son:

$$
\begin{aligned}
\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)}_{|\Phi^\pm\rangle} &= \pm \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)}_{|\Phi^\pm\rangle} \\
\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)}_{|\Psi^\pm\rangle} &= \pm \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)}_{|\Psi^\pm\rangle}
\end{aligned}
$$

Nombrando a los estados en términos delos autovalores $|m_1, m_2\rangle$ de los operadores $M_1 = \sigma_z^A \otimes \sigma_z^B$ y $M_2 = \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B$.

Õperadores/Autovalores		
Estados base de Bell	$M_1 = \sigma_z^A \otimes \sigma_z^B$	$M_2 = \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B$
$\|\Phi^+\rangle \equiv \|m_1 = +1, m_2 = +1\rangle \equiv \|\beta_{00}\rangle$	+1	+ 1
$\|\Phi^-\rangle \equiv \|m_1 = +1, m_2 = -1\rangle \equiv \|\beta_{10}\rangle$	+1	- 1
$\|\Psi^+\rangle \equiv \|m_1 = -1, m_2 = +1\rangle \equiv \|\beta_{01}\rangle$	- 1	+1
$\|\Psi^-\rangle \equiv \|m_1 = -1, m_2 = -1\rangle \equiv \|\beta_{11}\rangle$	- 1	- 1

Observamos que cada estado de la base de Bell es autoestado común de ambos operadores y está identificado en forma unívoca por los autovalores correspondientes $\{m_1, m_2\}$, por lo cual forman un Conjunto Completo de Observables que Conmutan (CCOC). Los estados de Bell no se pueden escribir como estado producto, y forman una base de estados entrelazados.

(c) Forma parte de la Entrega 3.

3. Problema 13

De este ejercicio solo verificaremos una propiedad inquietante de los estados de Bell. Y es que en estos estados la probabilidad de medir cualquier observable no degenerado definido en una de las partes del sistema de dos espines es 1/2 para los dos posibles autovalores. Es decir las mediciones sobre uno de los subsistemas dan resultados completamente aleatorios.

Sea un operador arbitrario definido en el subsistema A:

$$O^A \otimes \mathbb{I}^B = (a\,|a\rangle\langle a| + b\,|b\rangle\langle b|) \otimes \mathbb{I}^B$$

podemos verificar que los autoestados de este operador son: $|a\rangle \otimes |\alpha\rangle$, con autovalor a y $|b\rangle \otimes |\beta\rangle$ con autovalor b, siendo $|\alpha\rangle\ y\ |\beta\rangle$ estados arbitrarios del subsistema B.

Calculemos la probabilidad de medir a si estamos en el estado de Bell $|\Phi^\pm\rangle$. Hay tres formulas equivalentes:

$$Prob(O^A \otimes \mathbb{I}^B = |P_a \left|\Phi^\pm\right\rangle|^2 = \left\langle\Phi^\pm\right| P_a \left|\Phi^\pm\right\rangle = Tr(P_a P_{\Phi^\pm})$$

que usan el proyector sobre el autoestado de autovalor a, $P_a = |a\rangle\langle a| \otimes \mathbb{I}$. La última fórmula usa los proyectores sobre los estados de Bell, y se usará en el siguiente ejercicio.

Usando la primera igualdad,

$$\begin{aligned} Prob(O^A \otimes \mathbb{I}^B =& |P_a \Phi^\pm|^2 // = & |\,|a\rangle\langle a| \otimes \mathbb{I}^B \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle \pm |1\rangle \otimes |1\rangle)|^2 \\ =& \frac{1}{2}|\,|a\rangle\,\langle a|0\rangle \pm |a\rangle\,\langle a|1\rangle\,0|^2 \\ =& \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Claramente el resultado es el mismo si usamos el subsistema B y/o los otros dos estados de Bell $|\Psi^\pm\rangle$.

El resto del ejercicio es buena práctica para les alumnes.

4. Problema 14

Suponga que se prepara a un sistema de dos spins en el estado de Bell $|\Psi^-\rangle$ (también llamado estado singlete) y que ambas partículas son llevadas a laboratorios distantes (llamados A y B) de modo tal que el estado del conjunto A, B no se modifica durante el viaje. Suponga que en el laboratorio A se mide el observable $\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ y en el laboratorio B se mide $\sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \hat{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

(a) Calcule las probablidades Prob($\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \pm 1$), Prob($\sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \pm 1$) (probablidades para cada subsistema); Prob($\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \pm 1, \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \pm 1$), Prob($\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \mp 1, \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \pm 1$) (probabilidades conjuntas).

(b) Calcula la función de correlación entre los resultados obtenidos en A y B, definida como $K(A,B) = \left\langle\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} \otimes \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}\right\rangle - \langle\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}\rangle \left\langle\sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}\right\rangle$.

(c) Repita el cálculo de la función de correlación para los otros estados de Bell. ¿Cuáles son las diferencias y cuáles las similitudes entre ambos resultados?. Interprete.

(a) Vamos a hacer el problema para cualquier estado de Bell. Para ello usaremos primero el proyector sobre el estado de Bell $|m_1, m_2\rangle$ que se obtiene por aplicación de los proyectores sobre los subespacios con autovalor m_1 y m_2 para el CCOC $\{M_1, M_2\}$ del problema anterior. Como $M_1^2 = M_2^2 = \mathbb{I}$, podemos usar los proyectores de los autoestados de $\boldsymbol{sigma} \cdot \hat{n}$:

$$\Pi_{m_1} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + m_1 M_1) \qquad \Pi_{m_2} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + m_2 M_2)$$

por lo que, el proyector sobre un estado de Bell general es:

$$\boxed{|m_1, m_2\rangle\langle m_1, m_2| = \Pi_{m_1,m_2} = \Pi_{m_1}\Pi_{m_2} = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + m_1 M_1 + m_2 M_2 + m_1 m_2 M_1 M_2)}$$

recordemos que $M_1M_2 = -\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B$ (visto al momento de calcular el conmutador).

Los proyectores sobre los autoestados de $\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}$ y $\sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}$, con autovalor λ_a y λ_b, son:

$$\Pi_{\lambda_a} = \frac{1}{2}(\mathbb{I}^A + \lambda_a \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}^A) \otimes \mathbb{I}^B \qquad \Pi_{\lambda_b} = \mathbb{I}^A \otimes \frac{1}{2}(\mathbb{I}^B + \lambda_b \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}^B)$$

Finalmente la probabilidad de medir $\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \lambda_a$ es:

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(\lambda_a|\, |\beta_{m_1,m_2}\rangle) &= tr[\Pi_{\lambda_a}\Pi_{m_1,m_2}] \\
&= tr[\frac{1}{2}(\mathbb{I}^A + \lambda_a \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}^A) \otimes \mathbb{I}^B)\frac{1}{4}(\mathbb{I} + m_1M_1 + m_2M_2 + m_1m_2M_1M_2)] \\
&= \frac{1}{8}tr(\mathbb{I}) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donde se tuvo en cuenta que las trazas de operadores con una matriz de Pauli de un lado u otro del signo $\otimes$ se anulan y que $tr(\mathbb{I}) = 4$. Del mismo modo se puede obtener que:

$$\text{Prob}(\lambda_b|\, |\beta_{m_1,m_2}\rangle) = \frac{1}{2}$$

Los estados de Bell no dan mayor información sobre mediciones locales (sobre cada subsistema). No importa cual sea la medición, los dos resultados posibles se obtienen con igual probabilidad.

Ahora vamos a medir un operador sobre el conjunto, $\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} \otimes \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}$. Necesitaremos el proyector sobre los autoestados de este operador $\Pi_{\lambda_a,\lambda_b}$:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\lambda_a,\lambda_b} &= \Pi_{\lambda_a} \otimes \Pi_{\lambda_b} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbb{I}^A + \lambda_a \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}^A) \otimes \frac{1}{2}(\mathbb{I}^B + \lambda_b \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}^B) \\
&= \frac{1}{4}(\mathbb{I} + \lambda_b \mathbb{I}^A \otimes \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}^B + \lambda_a \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}^A \otimes \mathbb{I}^B + \lambda_a\lambda_b \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}^A \otimes \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}^B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \lambda_a, \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \lambda_b) &= tr(\Pi_{\lambda_a,\lambda_b}\Pi_{m_1,m_2}) \\
&= tr(\frac{1}{4}(\mathbb{I} + \underbrace{\lambda_b \mathbb{I}^A \otimes \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}^B + \lambda_a \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}^A \otimes \mathbb{I}^B}_{\text{no contribuye a la traza}} + \lambda_a\lambda_b \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}^A \otimes \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}^B) \times \\
&\quad \frac{1}{4}(\mathbb{I} + m_1 \sigma_z^A \otimes \sigma_z^B + m_2 \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B - m_1m_2 \sigma_y^A \otimes \sigma_y^B) \\
&= \frac{1}{16}tr[\mathbb{I} + \lambda_a\lambda_b(m_1 \underbrace{\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}^A \sigma_z^A}_{a_z\mathbb{I}^A} \otimes \underbrace{\sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}^B \sigma_z^B}_{b_z\mathbb{I}^B} + \\
&\quad \underbrace{\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}^A \sigma_x^A}_{a_x\mathbb{I}^A} \otimes \underbrace{\sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}^B \sigma_x^B}_{b_x\mathbb{I}^B} - \lambda_a\lambda_b m_1m_2 \underbrace{\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}}^A \sigma_y^A}_{a_y\mathbb{I}^A} \otimes \underbrace{\sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}}^B \sigma_y^B}_{b_y\mathbb{I}^B}) \\
&= \frac{1}{16}[1 + \lambda_a\lambda_b(m_1a_zb_z + m_2a_xb_x - m_1m_2a_yb_y)]tr(\mathbb{I})
\end{aligned}$$

donde bajo los paréntesis de la última ecuación sólo se a puesto la parte que contribuye a la traza dado que $\sigma_{\hat{\boldsymbol{m}}}\sigma_{\hat{\boldsymbol{n}}} = \hat{\boldsymbol{m}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\mathbb{I} + \hat{\boldsymbol{m}} \times \hat{\boldsymbol{n}}.\boldsymbol{\sigma}$. Por consiguiente obtenemos la fórmula general:

$$\boxed{\text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \lambda_a, \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \lambda_b) = \frac{1}{4}[1 + \lambda_a\lambda_b(m_1a_zb_z + m_2a_xb_x - m_1m_2a_yb_y)]}$$

Es posible verificar que: $\sum_{\lambda_a,\lambda_b} \text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \lambda_a, \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \lambda_b) = 1$.

Apliquemos en particular al estado de Bell $|\Psi^-\rangle$ cuyos autovalores son $m_1 = m_2 = -1$.

$$\boxed{\text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \lambda_a, \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \lambda_b|\, |\Psi^-\rangle) = \frac{1}{4}[1 - \lambda_a\lambda_b \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}]}$$

De donde la probabilidad conjunta de medir valores iguales de la proyección de spin $\lambda_a = \lambda_b$ ($\lambda_a \lambda_b = 1$) es

$$\boxed{\text{Prob}(\lambda_a \lambda_b = 1 | \left|\Psi^-\right\rangle) = \frac{1}{4}[1 - \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}]}$$

y la probabilidad conjunta de medir valores opuestos $\lambda_a = -\lambda_b$ ($\lambda_a \lambda_b = -1$)

$$\boxed{\text{Prob}(\lambda_a \lambda_b = -1 | \left|\Psi^-\right\rangle) = \frac{1}{4}[1 + \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}]}$$

Para el caso en que $\hat{\boldsymbol{a}} = \hat{\boldsymbol{b}}$ (en ambos laboratorios se mide en la misma dirección), la probabilidad de que se mida el mismo valor para las proyecciones es cero, y dá una certeza para medir valores opuestos (considerando los dos casos que poseen valores opuestos). Mas adelante veremos que esto es así pues la proyección del spin total en el estado $|\Psi^-\rangle$ es cero en cualquier dirección, por lo que $\sigma^A_{\hat{\boldsymbol{a}}} \times \mathbb{I}^B + \mathbb{I}^A \times \sigma^B_{\hat{\boldsymbol{a}}}$ posee autovalor cero. Existe una anticorrelación perfecta entre estas mediciones, un laboratorio mide siempre lo opuesto del otro, siempre que se elija medir en la misma dirección en forma conjunta ambas proyecciones.

(b) Calcular la función de correlación de medir en forma conjunta A y B, definida como $K(A, B) \equiv \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$. Necesitamos los valores medios de medidas en cada laboratorio:

$$\langle \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} \rangle^A = +1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0 = \left\langle \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} \right\rangle^B$$

y el valor medio de la medición conjunta

$$\left\langle \sigma^A_{\hat{\boldsymbol{a}}} \otimes \sigma^B_{\hat{\boldsymbol{b}}} \right\rangle = 2(+1) \times \frac{1}{4}[1 - \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}] + 2(-1) \times \frac{1}{4}[1 + \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}]$$

Por lo que la correlación en el caso $|\Psi^-\rangle$ es

$$K(\sigma^A_{\hat{\boldsymbol{a}}} \otimes \sigma^B_{\hat{\boldsymbol{b}}}) = -\hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}$$

En efecto si $\hat{\boldsymbol{a}} = \hat{\boldsymbol{b}}$ la correlación es -1, perfectamente anticorrelacionados, siempre se miden valores opuestos.

(c) Se puede calcular con la expresión general, se deja para el alumno.