Física Teórica 2 - Guía 3: Postulados

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

14 de abril de 2024

1. Breve resumen: Postulados

Listamos los postulados dados en la clase teórica:

- **Postulado 1** El estado de todo sistema físico está representado por un vector (de norma unidad) en un espacio de Hilbert H.
- **Postulado 2** Las magnitudes físicas (observables) se representan por Operadores hermíticos lineales que actuan en H.
- **Postulado 3** Los resultados posibles de la medición de cualquier observable A son sus autovalores a_n.
- **Postulado 4 (Regla de Born)** Si el estado de un sistema es $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener el resultado a_n en la medición del observable A es siempre

$$Prob(a_n|\,|\psi\rangle) = ||\Pi_n\,|\psi\rangle\,|^2 = \langle\psi|\,\Pi_n\,|\psi\rangle = tr\,(\Pi_n\,|\psi\rangle\langle\psi|)$$

donde Π_n es el proyector asociado al autovalor a_n. En el caso no degenerado $\Pi_n = |a_n\rangle\langle a_n|$ y $Prob(a_n|\,|\psi\rangle) = |\,\langle a_n|\psi\rangle\,|^2$. En el caso degenerado $\Pi_n = \sum_{l=1}^{g_n} |a_n, l\rangle\langle a_n, l|$, y los $|a_n, l\rangle$ son autoestados ortonormales de A con autovalor a_n.

- **Postulado 5 (Postulado de proyección o colapso)** Si el estado de un sistema es $|\psi\rangle$, y medimos el observable A obteniendo el autovalor a_n, entonces el estado del sistema después de la medición $|\psi'\rangle$ se calcula normalizando la proyección de ψ sobre el subespacio asociado al autovalor a_n.

$$|\psi'\rangle = \frac{\Pi_n\,|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\,\Pi_n\,|\psi\rangle}}$$

Para el Problema 4, necesitaremos usar la expresión de la probabilidad condicional:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

En la figura, $P(A|B)$ se puede interpretar como, tomando los casos en los que B se cumple, la fracción en los que también se cumple A: área verde dividida a área de B, pero cada área es proporcional a la probabilidad respectiva. La constante de proporcionalidad es el área de todos los eventos, que se cancela.

Otro resultado útil de probabilidades es:

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$$

que se deduce del mismo gráfico.

2. Problema 2

Parte de este problema se hizo en clase con detalle. Se dejó de tarea a los alumnos terminarlo.

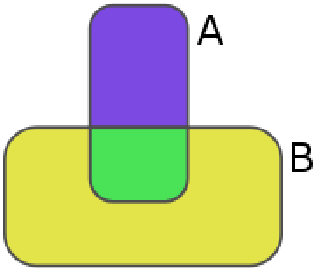

Figura 1: *Fuente Wikipedia*

3. Problema 4

(a) Si $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$. Para distinguir ambos estados buscamos un operador O tal que si ingresa la partícula en el estado $|\alpha\rangle$ al aparato de medición de O, se obtenga o_1 con certeza, y si ingresa en el estado $|\beta\rangle$, se obtenga o_2 con certeza. Siendo $|o_1\rangle$ y $|o_2\rangle$ los autoestados correspondientes a dichos autovalore, esto implica que:

$$P(o_1|\,|\alpha\rangle) = |\,\langle o_1|\alpha\rangle\,|^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \quad |o_1\rangle = |\alpha\rangle \quad \text{a menos de un factor de fase.}$$
$$P(o_2|\,|\beta\rangle) = |\,\langle o_2|\beta\rangle\,|^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \quad |o_2\rangle = |\beta\rangle \quad \text{a menos de un factor de fase.}$$

Eligiendo los autovalores $o_1 = 1$ y $o_2 = -1$ obtenemos la descomposición espectral de O:

$$O = |\alpha\rangle\langle\alpha| - |\beta\rangle\langle\beta|$$

(b) Si $\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0$. Plantear una distinción entre los estados perfecta nos lleva a la misma conclusión: $|o_1\rangle = |\alpha\rangle$ y $|o_2\rangle = |\beta\rangle$. Pero esto nos lleva a la contradicción que

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle o_1|o_2\rangle = 0.$$

Esto es así pues $o_1 \neq o_2$ y sabemos que autoestados correspondientes a distintos autovalores son ortogonales. Por lo tanto no es posible distinguir con certeza estados no ortogonales.

(c) De lo anterior se deduce que los estados no ortogonales no son perfectamente distinguibles por un dado experimento. Esto es una ventaja que se usa en la distribución cuántica de claves.

(d) Admitimos que los estados no ortogonales, no son perfectamente distinguibles por un experimento. Ahora queremos plantear un experimento que maximice la capacidad de distinguir ambos estados. Lo hacemos en dimensión dos. Los estados generales $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ se los define por su dirección en la esfera de Bloch:

$$|\alpha\rangle = |+, \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{a}\rangle$$
$$|\beta\rangle = \left|+, \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{b}\right\rangle$$

El operador con autovalores ± 1 mas general posible es

$$O = \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}$$

Mandamos al aparato de medición partículas en estado $|\alpha\rangle$ con probabilidad $P(|\alpha\rangle) = 1/2$ y partículas en estado $|\beta\rangle$ con probabilidad $P(|\beta\rangle) = 1/2$. Queremos asociar el autovalor $+1$ de $\sigma\cdot\hat{n}$ con la detección de $|\alpha\rangle$ y el autovalor -1 de $\sigma\cdot\hat{n}$ con la detección de $|\beta\rangle$. Definimos la probabilidad de éxito como la suma de probabilidades de éxito si se envía $|\alpha\rangle$ y se lo detecta, y de éxito si se envía $|\beta\rangle$ y se lo detecta:

$$\begin{aligned} P_{Exito} &= P(\text{se envía}\,|\alpha\rangle\,\text{y se mide}\quad \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n} = 1) + P(\text{se envía}\,|\beta\rangle\,\text{y se mide}\quad \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n} = -1) \\ &= \qquad P(|\alpha\rangle)P(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n} = 1|\,|\alpha\rangle) \qquad + \qquad P(|\beta\rangle)P(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n} = -1|\,|\beta\rangle) \end{aligned}$$

donde se usó la fórmula de la probabilidad conjunta presentada en la introducción.

Usando los proyectores:

$$
\begin{aligned}
P(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}=1|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}=1) &= Tr[\Pi_{|+,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\rangle}\Pi_{|+,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\rangle}] \\
&= Tr[(\frac{(\mathbb{I}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})}{2})(\frac{(\mathbb{I}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})}{2})] \\
&= \frac{1}{4}Tr[\mathbb{I}+\underbrace{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{a})}_{\hat{n}\cdot\hat{a}\mathbb{I}+\hat{n}\times\hat{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{a}]
\end{aligned}
$$

usando la traza nula de las σ_i obtenemos la fórmula dada en la teórica:

$$
\boxed{P(\hat{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}=1|\hat{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}=1)=\frac{1}{2}(1+\hat{n}\cdot\hat{a})}
$$

Cambiando $\hat{n}$ por $-\hat{n}$ y $\hat{a}$ por $\hat{b}$, obtenemos :

$$
P(\hat{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}=1|\hat{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}=-1)=\frac{1}{2}(1-\hat{n}\cdot\hat{b}) \tag{1}
$$

Por lo que la probabilidad de éxito es

$$
P_{Exito}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\hat{n}\cdot(\hat{a}-\hat{b})
$$

cuyo valor máximo se da cuando elegimos $\hat{n}\parallel \widehat{(a-\hat{b})}$, obteniendo

$$
\begin{aligned}
\hat{n}\cdot(\hat{a}-\hat{b}) = |\hat{n}||\widehat{(\hat{a}-\hat{b}}|\cos(0) &= \sqrt{(\hat{a}-\hat{b})^2} \\
&= \sqrt{|\hat{a}|^2+|\hat{b}|^2-2\hat{a}\cdot\hat{b}} = \sqrt{2(1-\hat{a}\cdot\hat{b}}
\end{aligned}
$$

Por consiguiente la probabilidad de éxito máxima es

$$
P_{Máxima}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-\hat{a}\cdot\hat{b}}
$$

Casos especiales:

i) Si $\hat{b}=-\hat{a}$ (estados ortogonales $\langle\alpha|\beta\rangle=0$) obtenemos $P_{Máxima}=1$, tal como se vió en la primera parte.

ii) Si $\hat{b}\perp\hat{a}$ obtenemos $P_{Máxima}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2\sqrt{2}})\sim 0,85$.

4. Problema 5

Se recomienda hacer la simulación cuyo link está en la página de la materia y analizarla. Fue extensivamente presentado en la teórica.