Física Teórica 2 - Guía 3: Postulados

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

17 de abril de 2024

1. Problema 7

Considere el sistema de spin 1 del problema $\boxed{P1}$ y calcule los operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2.

(a) Diga cuáles son sus autovalores y autovectores. ¿Conmutan los operadores? Determine qué combinaciones de estos observables forman un CCOC. ¿Cuál es la base común de autovectores?

(b) Suponga que se prepara un autoestado de L_x con $m_x = 1$ y se mide L_z^2. ¿Cuáles son los resultados posibles y sus probabilidades?

(c) Repita el ítem anterior pero para los casos en que el estado inicial sobre el que se mide L_z^2 es el autoestado $m_y = 0$ o $m_z = 1$.

(d) Discuta cómo se puede hacer para medir simultáneamente los tres operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2. Diseñe un instrumento que mida estos operadores usando los aparatos de Stern–Gerlach que separan el haz de acuerdo a los valores de L_j (recuerde que el proceso de separación de un haz en tres, que es efectuado aplicando un campo magnético apropiado, puede ser revertido totalmente).

Volvamos un poco al $\boxed{P1}$. Los operadores L_j en la base $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$ tienen las expresiones matriciales:

$$L_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente los operadores son hermíticos ($L_j = L_j^\dagger$) y por consiguiente son observables. Dada la estructura de las matrices (diagonal por bloques, un bloque 1×1 y otro bloque 2×2) los autovectores y autovalores se obtienen en cada subespacio invariante. En todos los casos el bloque de 1×1 posee autovalor 0. Dado que los bloques de 2×2 para L_x y L_z son proporcionales a σ_x, los autovalores (medidos en unidades de $\hbar$) y autovectores son los mismos que para esta matriz de Pauli, en la base correspondiente. Por ejemplo para el bloque σ_x del operador L_x, tendremos la tabla: [h!]

Autovalor	Autoestado
0	$\|a\rangle$
$\hbar$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|b\rangle + \|c\rangle)$
-$\hbar$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|b\rangle - \|c\rangle)$

Cuadro 1: *Autovalores y autoestados del operador L_x*

Similarmente, en el caso de L_y el bloque de 2×2 es proporcional a la matriz de Pauli σ_y, en la base de estados:$\{|a\rangle, |c\rangle\}$. [h!]

Autovalor	Autoestado
0	$\lvert a\rangle$
$\hbar$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert b\rangle + i\,\lvert c\rangle)$
-$\hbar$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert b\rangle - i\,\lvert c\rangle)$

Cuadro 2: *Autovalores y autoestados del operador L_y*

En resumen, los tres operadores (componentes de momento angular 1 en las direcciones x, y, z tienen autovalores (medidos en unidades de $\hbar$) $m_j \in \{1, 0, -1\}$. La base en que están expresados estos operadores, no es la base usual pues no diagonaliza L_z. Pero como se puede verificar posee igual algebra de conmutadores que el spin 1/2:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k,$$

es decir es un momento angular (esto se verá mas adelante).

Un esquema de experimento de Stern Gerlach para este caso (asumimos que asociado a $\boldsymbol{L}$ existe un momento magnético, susceptible de interactuar con un campo magnético no uniforme en una dada dirección $\hat{\boldsymbol{n}}$)

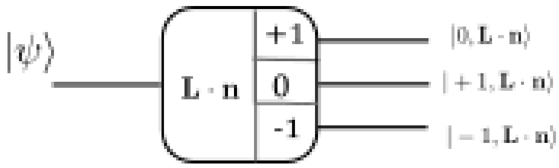

Figura 1: *Stern Gerlach caso $L = 1$*

En este caso los autovalores están medidos en unidades de $\hbar$ (m_n). Consideraremos ahora L_j^2. Es fácil calcularlo pues elevamos al cuadrado cada bloque y $\sigma_j^2 = \mathbb{I}$ en 2×2:

$$L_x^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_y^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_z^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Las tres matrices son diagonales, sus autovalores son $L_j^2 = 0$ y $L_j^2 = \hbar^2$ este ultimo doblemente degenerado. Sus autovectores son los elementos de la base que podemos identificar como: $\lvert a\rangle = \lvert m_x = 0\rangle$, $\lvert b\rangle = \lvert m_y = 0\rangle$ y $\lvert c\rangle = \lvert m_z = 0\rangle$.

Al ser diagonales conmutan, por eso tienen esta base de autoestados comunes. Cualquier par de estos operadores, por ejemplo $\left\{L_x^2, L_y^2\right\}$ forman un CCOC, pues la base se identifica en forma unívoca por sus autovalores correspondientes: $\lvert a\rangle = \left\lvert L_x^2 = 0, Ly^2 = \hbar^2\right\rangle$, $\lvert b\rangle = \left\lvert L_x^2 = \hbar^2, Ly^2 = 0\right\rangle$ y $\lvert c\rangle = \left\lvert L_x^2 = \hbar^2, Ly^2 = \hbar^2\right\rangle$.

También se podría usar un CCOC dado por $\left\{L_x^2, L_y^2, L_z^2\right\}$, bastando agregar el tercer autovalor, que está determinado por los dos primeros autovalores pues es posible ver que $L_x^2+L_y^2+L_z^2 = 2\hbar^2\mathbb{I}$.

(b) Conociendo los autoestados de σ_x podemos identificar que

$$\lvert m_x = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert b\rangle + \lvert c\rangle)$$

Usando los proyectores correspondientes a los dos autovalores posibles de L_z^2 tenemos:

$$\Pi_{L_z^2=0}\lvert m_x=1\rangle = \lvert c\rangle\langle c\rvert\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert b\rangle + \lvert c\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\lvert c\rangle$$

$$\Pi_{L_z^2=\hbar^2}\lvert m_x=1\rangle = (\lvert a\rangle\langle a\rvert + \lvert b\rangle\langle b\rvert)\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert b\rangle + \lvert c\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\lvert b\rangle$$

de donde obtenemos las probabilidades:

$$Prob(L_z^2 = 0|\,|m_x = 1\rangle) = |\frac{1}{\sqrt{2}}\,|c\rangle\,|^2 = \frac{1}{2}$$
$$Prob(L_z^2 = \hbar^2|\,|m_x = 1\rangle) = |\frac{1}{\sqrt{2}}\,|b\rangle\,|^2 = \frac{1}{2}$$

(c) i) Caso con estado inicial

$$|m_y = 0\rangle = |b\rangle\,.$$

Como sabemos que $|b\rangle$ es autoestado de L_z^2 con autovalor $\hbar^2$, sólo es posible medir este valor, con certeza.

ii) Caso con estado inicial

$$|m_z = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle)$$

Es claro que este estado es autoestado de L_z^2 con autovalor $\hbar^2$. Se recomienda como ejercicio hacer el cálculo con el uso de proyectores (como en el ítem (b)).
(d) Experimento para medir los tres observables $\left\{L_x^2, L_y^2, L_z^2\right\}$ usando los aparatos de Stern Gerlach en las diferentes direcciones. Como vimos los estados de base poseen valores definidos para cada uno de estos operadores, y por otro lado, los estados de base poseen la propiedad $L_j = m_j\hbar = 0$.

Al hacerlo extraemos los autoestados de base que son a su vez autoestados con los tres valores de L_j^2 definidos, como se deduce de las correspondientes matrices, y se sintetizan en la siguiente Tabla:

$\|a\rangle = \|m_x = 0\rangle = \left\|L_x^2 = 0, L_y^2 = \hbar^2, L_z^2 = \hbar^2\right\rangle$
$\|b\rangle = \|m_y = 0\rangle = \left\|L_x^2 = \hbar, L_y^2 = 0, L_z^2 = \hbar^2\right\rangle$
$\|c\rangle = \|m_x = 0\rangle = \left\|L_x^2 = \hbar^2, L_y^2 = \hbar^2, L_z^2 = 0\right\rangle$

Cuadro 3: *Autoestados de los tres operadores operador* L_x^2, L_y^2, L_z^2

Por consiguiente basta extraer del haz incidente en forma secuencial los casos con $m_j = 0$, volviendo a unir los haces correspondientes a $m_j = \pm 1$ mediante aparatos que revierten la separación (con campo magnético opuesto). El esquema final fue presentado en clase y queda como ejercicio. Abajo se muestra el esquema del problema resuelto hace dos años. No recomiendo en general otras soluciones, en este caso hago me es útil el dibujo. Notar que el orden delos aparatos Stern-Gerlach es diferente, pero no interesa pues son operadores compatibles. Hay dos Stern Gerlach inversos que unen los haces residuales, y un typo en la figura, se debe intercambiar $|a\rangle$ con $|b\rangle$.

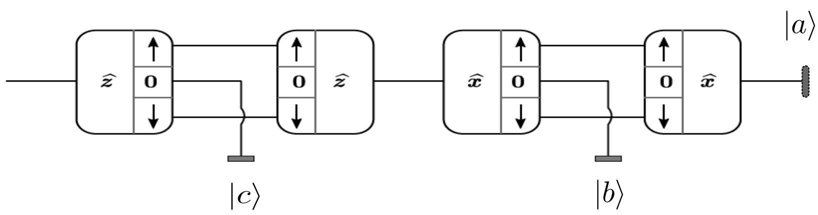

Figura 2: *Aparato que usa Stern Gerlach para medir los tres operadores* $\{L_x^2, L_y^2, L_z^2\}$. *El segundo y cuarto Stern Gerlach tiene el campo magnético invertido (juntan los haces).*