P6) Dim 3 $\Rightarrow \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$

Operadores:

$$A = a(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - a|3\rangle\langle 3|$$
$$B = b(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|) - b|2\rangle\langle 2|$$
$$C = c(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + 2c|3\rangle\langle 3|$$

a) ¿Conmutan? Sí, porque son todos diagonales en la misma base.

b) Mido A y obtengo a, después mido B y obtengo b. ¿Puedo determinar el estado final?

Estado inicial $|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle$

Mido A y obtengo $a \Rightarrow$ Tengo que proyectar $|\psi\rangle$ en el subespacio correspondiente:

$$P_a = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$$

$$|\psi'\rangle = \frac{P_a|\psi\rangle}{\langle\psi|P_a|\psi\rangle^{1/2}} = \frac{1}{(|c_1|^2 + |c_2|^2)^{1/2}}(c_1|1\rangle + c_2|2\rangle)$$

Mido B y obtengo b: $P_b = |1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|$

$$\boxed{|\psi''\rangle = \frac{P_b|\psi'\rangle}{\langle\psi'|P_b|\psi'\rangle} = |1\rangle} \rightarrow$$ Queda unívocamente determinado.

c) Idem (b) pero mido A obteniendo a y C obteniendo c.

$|\psi'\rangle$ es igual que antes.

$$|\psi''\rangle = \frac{P_c\ |\psi'\rangle}{\langle\psi'|P_c|\psi'\rangle^{1/2}} \qquad P_c = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$$

$$P_c = P_a \Rightarrow |\psi''\rangle = |\psi'\rangle = \frac{1}{(|c_1|^2+|c_2|^2)^{1/2}}\left(c_1|1\rangle + c_2|2\rangle\right)$$

En este caso no está determinado, porque no conocemos c_1 ni c_2.

d) ¿Qué subconjuntos de $\{A, B, C\}$ forman CCOC?

Para ver esto etiquetamos los estados con los autovalores.

Miramos $\{A, B\}$:

$$\left.\begin{aligned} |1\rangle &\rightarrow |a, b\rangle \\ |2\rangle &\rightarrow |a, -b\rangle \\ |3\rangle &\rightarrow |-a, b\rangle \end{aligned}\right\}$$ Son todos distintos, forman CCOC.

$\{A, C\}$:

$$\left.\begin{array}{l} |1\rangle \rightarrow |a, c\rangle \\ |2\rangle \rightarrow |a, c\rangle \end{array}\right\} \text{Son iguales} \Rightarrow \text{No forman CCOC.}$$

$$|3\rangle \rightarrow |-a, 2c\rangle$$