Clase - Parte 1

domingo, mayo 26, 2024 7:19 PM

Suma de momento angular

¿Por qué nos interesa estudiar el momento angular total?

- Sistemas compuestos
- sistemas con muchos grados de libertad

} muchas veces se conserva el momento angular total pero no los parciales

Breve repaso teórico...

- Consideramos dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ correspondientes a estados de momento angular de bases $\{|j_1, m_1\rangle\}_{j_1, m_1}$ y $\{|j_2, m_2\rangle\}_{j_2, m_2}$, respectivamente tales que:
  - $J_i^2 |j_i, m_i\rangle = j_i(j_i+1)\hbar^2 |j_i, m_i\rangle$
  - $J_{z_i} |j_i, m_i\rangle = m_i \hbar |j_i, m_i\rangle$
  - $J_{\pm_i} |j_i, m_i\rangle = \hbar\sqrt{j_i(j_i+1) - m_i(m_i \pm 1)}\, |j_i, m_i \pm 1\rangle$

- El espacio de Hilbert global es: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, y la base del espacio:

$$\boxed{\{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\}} \longrightarrow \text{BASE PRODUCTO}$$

- Luego sobre este espacio actúan los operadores producto. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} J_1^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= (J_1^2 \otimes \mathbb{1}_2) |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \\ &= J_1^2 |j_1, m_1\rangle \otimes \mathbb{1}_2 |j_2, m_2\rangle \\ &= j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \\ &= j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \end{aligned}$$

- Sobre este espacio de Hilbert se define el operador momento angular total:

$$\boxed{J := J_1 + J_2}$$

OBS:
- $[J_1, J_2] = 0$
- J_1 y J_2 pueden ser L y/o S
- J satisface el álgebra de momento angular

$$\begin{aligned} [J_k, J_\ell] &= [J_{1_k} + J_{2_k}, J_{1_\ell} + J_{2_\ell}] \\ &= [J_{1_k}, J_{1_\ell}] + \underbrace{\cancel{[J_{1_k}, J_{2_\ell}]}}_{=0} + \underbrace{\cancel{[J_{2_k}, J_{1_\ell}]}}_{=0} + [J_{2_k}, J_{2_\ell}] \\ &= i\,\varepsilon_{k\ell m} J_{1_m} + i\,\varepsilon_{k\ell m} J_{2_m} \\ &= i\,\varepsilon_{k\ell m} J_m \end{aligned}$$

- Se puede definir $\boxed{J^2 = J_x^2 + J_y^2 = J_z^2}$ tal que:
  - $[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$
  - $[J^2, J_1^2] = [J^2, J_2^2] = 0$
  - $[J_z, J_1^2] = [J_z, J_2^2] = 0$

  y entonces $\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\}$ forman un CCOC. A partir de acá podemos tomar otra base ortonormal:

$$\boxed{\{|j_1, j_2, j, m\rangle\}} \longrightarrow \text{BASE ACOPLADA}$$

donde
- $|j_1 - j_2| < j < j_1 + j_2 \longrightarrow$ puede haber mas de 1 j
- $m_i = -j_i, \ldots, 0, \ldots, j_i$

- Como J es un momento angular se pueden definir los operadores de subida y bajada:

$$\boxed{J_\pm = J_x \pm i J_y = (J_{1_x} + J_{2_x}) \pm i(J_{1_y} \pm J_{2_y}) = J_{1\pm} + J_{2\pm}}$$

que satisface:

$$\left[J_\pm |j_1, j_2, j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\, |j_1, j_2, j, m\rangle \right]$$

- A j_1 y j_2 fijos hay dos descripciones (bases) alternativas:

$\{|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\}$ BASE PRODUCTO

$\{|j_1, j_2, j, m\rangle\}$ BASE ACOPLADA

Veamos cómo es el cambio de base entre ambas:

$$\begin{aligned} |j_1, j_2, j, m\rangle &= \Big\{ \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\langle j_1, j_2, m_1, m_2| \Big\} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \\ &= \Big\{ \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_2, j, m_1, m_2\rangle \Big\} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \end{aligned}$$

N

$$\boxed{|j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{j,m}_{j_1, j_2, m_1, m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle} \quad \text{con} \quad \boxed{C^{j,m}_{j_1, j_2, m_1, m_2} = \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_1, j, m\rangle}$$

→ COEFICIENTES DE CLEBSH - GORDAN

↓

Para que sean distintos de cero es necesario que $m = m_1 + m_2$

Clase - Parte 2

domingo, mayo 26, 2024 8:29 PM

EJERCICIO 12 (1+1/2)

P12 Considere una partícula de spin ½ en un estado con momento angular orbital $l = 1$.

(a) Encuentre el estado con j_{max} y $m_{j_{max}}$ en términos de los estados $|l, s, m_l, m_s\rangle$.

(b) Use $J_- = L_- + S_-$ para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.

(c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max} - 1, j_{max} - 1\rangle$.

(d) Use J_- para generar todos los estados $|j_{max} - 1, m\rangle$.

(a)

→ Primero identificamos la base producto $\{|l, s, m_l, m_s\rangle = |m_l, m_s\rangle\}$

$s = 1/2 \longrightarrow m_s = -1/2, 1/2$

$l = 1 \longrightarrow m_l = -1, 0, 1$

$\Rightarrow \boxed{B_p = \{|-1, \pm 1/2\rangle, |0, \pm 1/2\rangle, |1, \pm 1/2\rangle\}}$

→ El operador de momento angular total: $J = S + L$ con

$|1 - 1/2| < j < 1 + 1/2$

$1/2 < j < 3/2$

$\Rightarrow j = 1/2, 3/2$

$$\begin{cases} j = 1/2 \longrightarrow m = -1/2, 1/2 \\ j = 3/2 \longrightarrow m = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2 \end{cases}$$

→ Entonces la base acoplada es:

$$\boxed{B_j = \{|3/2, \pm 1/2\rangle, |3/2, \pm 3/2\rangle, |1/2, \pm 1/2\rangle\}}$$

→ Con esto podemos identificar:

$$\boxed{|j_{max}, m_{max}\rangle = |3/2, 3/2\rangle = |1, 1/2\rangle}$$

(b)

→ Aplicamos J_- sobre $|3/2, 3/2\rangle$ para conseguir los estados $|3/2, m\rangle$:

$J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\,|j, m \pm 1\rangle$

- $|3/2, 1/2\rangle$

1°) $J_- |3/2, 3/2\rangle = \sqrt{3/2(3/2+1) - 3/2(3/2-1)}\,\hbar\,|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{3}\hbar\,|3/2, 1/2\rangle$

2°) $$\begin{aligned} |3/2, 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}\hbar} J_- |3/2, 3/2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}\hbar}(L_- + S_-)|1, 1/2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}\hbar}(L_-|1, 1/2\rangle + S_-|1, 1/2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{3}\hbar}\left(\hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}\,|0, 1/2\rangle + \hbar\sqrt{1/2(1/2+1) - 1/2(1/2-1)}\,|1, -1/2\rangle\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{|3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,|0, 1/2\rangle + |1, -1/2\rangle\right)}$$

- $|3/2, -1/2\rangle$

1°) $J_- |3/2, 1/2\rangle = \sqrt{3/2(3/2+1) - 1/2(1/2-1)}\,\hbar\,|3/2, -1/2\rangle = 2\hbar\,|3/2, -1/2\rangle$

2°) $$\begin{aligned} |3/2, -1/2\rangle &= \frac{1}{2\hbar} J_- |3/2, 1/2\rangle \\ &= \frac{1}{2\hbar}(L_- + S_-)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\,|0, 1/2\rangle + |1, -1/2\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}\hbar}\left(\sqrt{2}\sqrt{2}\hbar\,|-1, 1/2\rangle + \sqrt{2}\hbar\,|0, -1/2\rangle + \sqrt{2}\hbar\,|0, -1/2\rangle + 0\right) \end{aligned}$$

$S_-|-1/2\rangle = 0$

$$\boxed{|3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|0, -1/2\rangle}$$

- $|3/2, -3/2\rangle$

⋮

$$\boxed{|3/2, -3/2\rangle = |-1, -1/2\rangle}$$

(c)

→ Para encontrar los estados del tipo $|1/2, m\rangle$ tenemos en cuenta que $|1/2, 1/2\rangle$ es un autoestado de J_z de autovalor

$$m = m_l + m_s = 1/2$$

y eso se consigue con:

$$\begin{cases} m_l = 1 \\ m_s = -1/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_l = 0 \\ m_s = 1/2 \end{cases}$$

y por lo tanto, necesariamente:

$$\left[\,|1/2, 1/2\rangle = \alpha\,|0, 1/2\rangle + \beta\,|1, -1/2\rangle\,\right]$$

→ Para determinar la combinación usamos que:

1) $|1/2, 1/2\rangle$ debe ser ortogonal al $|3/2, 1/2\rangle$ por ser ambos autoestados de J_z de autovalor $1/2$. Entonces:

$$\begin{aligned} 0 = \langle 3/2, 1/2 | 1/2, 1/2\rangle &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0, 1/2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1, -1/2|\right)\left(\alpha\,|0, 1/2\rangle + \beta\,|1, -1/2\rangle\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \beta = -\sqrt{2}\,\alpha \end{aligned}$$

2) Normalización

$$1 = \langle 1/2, 1/2 | 1/2, 1/2\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \alpha = 1/\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{|1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1, -1/2\rangle}$$

→ Luego por ortogonalidad:

$$\boxed{|1/2, -1/2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|0, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1, -1/2\rangle}$$

→ El mismo resultado se puede conseguir aplicando J_- al estado $|1/2, 1/2\rangle$.

Clase - Parte 3

domingo, mayo 26, 2024 9:37 PM

EJERCICIO 14

P14 El acoplamiento spin-órbita es un efecto relativista que introduce, a bajas energías, una interacción efectiva entre el spin y el momento angular orbital de una partícula. De esta forma, incluyendo el acoplamiento spin-órbita, el Hamiltoniano electrónico para el átomo de Hidrógeno sin campos externos es

$$H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3}\frac{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}}{\hbar^2}, \qquad \text{con } H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r},$$

y donde $\boldsymbol{S}$ representa el spin del electrón.

(a) Evalúe los conmutadores

$$[H, L^2],\ [H, S^2],\ [H, J^2],\ [H, L_z],\ [H, S_z],\ [H, J_z],$$

donde $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$. ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores (incluyendo H) que conmutan mutuamente?

Ayuda: recuerde que en coordenadas polares el operador p^2 se escribe como

$$\boldsymbol{p}^2 = -\hbar^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial^2}r + \frac{1}{r^2}\boldsymbol{L}^2.$$

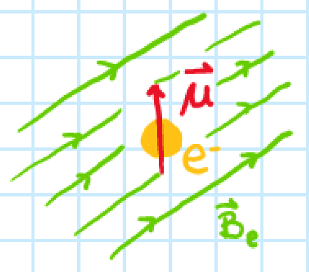
(b) Considere ahora que se enciende un campo magnético externo $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, de modo que al Hamiltoniano se le agrega el término

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar}B\,(L_z + 2S_z).$$

Para este caso, repita el inciso (a).

ACOPLAMIENTO SPIN-ÓRBITA: surge de la interacción entre el e^- y el campo magnético generado por el mismo

Desde el punto de vista del e^-....



$\Rightarrow$ Interacción $\propto \vec{\mu}\cdot\vec{B} = H$

- $B_e \propto -\vec{v}\times\vec{E}_e = -\frac{\vec{P}}{m_e}\times\underbrace{\vec{E}}_{\frac{-e}{r^3}\vec{r}} = \frac{-e}{m_e r^2}\,\vec{r}\times\vec{P}$
- $\vec{\mu}\propto\vec{S}$

$\Big\}\ H \propto \frac{\vec{S}\cdot\vec{L}}{r^3}$

(a)

→ El Hamiltoniano es: $H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3}\frac{\vec{L}\cdot\vec{S}}{\hbar^2}$ con $H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$

→ Nos dan la ayuda: $p^2 = -\hbar^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial^2} r + \frac{1}{r^2}L^2$

→ Entonces:

- $[H, L^2] = \underbrace{[\cancel{H_0}, L^2]}_{=0} + \frac{2\mu_B^2}{\hbar^2 r^3}[\vec{L}\cdot\vec{S}, L^2] = \frac{2\mu_B^2}{\hbar^2 r^3} = \sum_i \frac{2\mu_B}{\hbar^2 r^3}\Big(L_i\underbrace{[\cancel{S_i}, L^2]}_{=0} + \underbrace{[\cancel{L_i}, L^2]}_{=0}S_i\Big) = 0$

  $\vec{L}\cdot\vec{S} = \sum_i L_i S_i$

- $[H, S^2] = 0$ (idem)
- $[H, J^2] = [H, \underbrace{\cancel{L^2}}_{=0} + \underbrace{\cancel{S^2}}_{=0} + \underbrace{\cancel{2\vec{L}\cdot\vec{S}}}_{=0}] = 0$
- $[H, L_z] = \underbrace{[\cancel{H_0}, L_z]}_{=0} + \frac{2\mu_B^2}{\hbar^2 r^3}[L\cdot S, L_z] = \frac{2\mu_B^2}{\hbar r^3}\sum_i [L_i S_i, L_z]$

  $= \frac{2\mu_B^2}{\hbar^2 r^3}\sum_i\Big(L_i\underbrace{[\cancel{S_i}, L_z]}_{=0} + [L_i, L_z]S_i\Big)$

  $= \frac{2\mu_B^2}{\hbar^2 r^3}\Big(\underbrace{[L_x, L_z]}_{-i\hbar L_y}S_x + \underbrace{[L_y, L_z]}_{i\hbar L_x}S_y + \underbrace{[L_z, \cancel{L_z}]}_{=0}S_z\Big)$

  $= \frac{i\,2\mu_B^2}{\hbar r^3}\left(L_x S_y - L_y S_x\right)$

- $[H, S_z] = \ldots$ (lo mismo pero intercambiando $S_i \leftrightarrow L_i$)
- $[H, J_z] = \ldots = 0$

→ Con esto podemos ver que el CCOC es: $\{H, L^2, S^2, J^2, J_z\}$

(b)

→ Se prende un campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$ tal que al Hamiltoniano se le agrega el término:

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar}B\,(L_z + 2S_z)$$

→ Hay que ver si este término conmuta con los operadores del inciso (a)

- $[H_B, L^2] = \frac{\mu_B}{\hbar}B\Big(\underbrace{[L_z, \cancel{L^2}]}_{=0} + 2\underbrace{[\cancel{S_z}, L^2]}_{=0}\Big) = 0$
- $[H_B, S^2] = 0$
- $[H_B, J^2] = \cdots \propto [L_z + 2S_z, \vec{L}\cdot\vec{S}] \neq 0$
- $[H_B, J_z] = 0$

→ Ahora el CCOC se reduce: $\{H, L^2, S^2, J_z\}$