Física Teórica 2 - Guía 4: Evolución en sistemas compuestos

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

2 de mayo de 2024

1. Breve resumen: Evolución de sistemas compuestos

Veremos un sistema compuesto por dos partes (por ejemplo dos partículas) o dos grados de libertad distintos (por ejemplo *spin* y posición). Consideremos su evolución temporal. Como es usual la evolución temporal está dada por el operador de evolución que para el caso con Hamiltoniano que no depende del tiempo está dado por:

$$U(t,0) = e^{-iHt/\hbar}$$

Tenemos tres caso relevantes que aparecen en los problemas de la guía:

- Caso de subsistemas no interactuantes: $H = H_A \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes H_B$, dado que es suma de Hamiltonianos que conmutan (se sugiere probarlo) la exponencial de la suma es producto de exponenciales [1]:

$$\begin{aligned} U(t,0) &= e^{-i(H_A\otimes\mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A\otimes H_B)t/\hbar} \\ &= e^{-i(H_A\otimes\mathbb{I}_B)t/\hbar}\, e^{-i(\mathbb{I}_A\otimes H_B)t/\hbar} \\ &= e^{-iH_At/\hbar} \otimes e^{-iH_Bt/\hbar} \end{aligned}$$

  Como consecuencia de esto la evolución de un estado producto inicial (no entrelazado), sigue siendo un estado producto a lo largo del tiempo, y no aparece el entrelazamiento. Completar problema $\boxed{P13}$.

- Caso de Hamiltoniano con interacción, dada por el producto tensorial de dos operadores definidos en cada parte, cuyos autoestados son conocidos: $H = A \otimes B$ con $A\,|a_i\rangle = a_i\,|a_i\rangle$, $B\,|b_j\rangle = b_j\,|b_j\rangle$, entonces $H\,|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle = a_i b_j\,|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$. La base producto de estos autoestados $|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$ es autoestado de H con autovalor $a_i b_j$. Como sabemos que una función del operador aplicado sobre el autoestado es esa función evaluada en el autovalor aplicado sobre el autoestado, tenemos

$$U(t,0)\,|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle = e^{-iA\otimes Bt/\hbar}\,|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle = e^{-ia_ib_jt/\hbar}\,|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$$

  esta evolución desarrolla entrelazamiento en el tiempo si el estado producto inicial no es autoestado de H.La última igualdad se prueba del mismo modo que antes, expandiendo la función y operando sobre los autovectores. Resolver $\boxed{P14}$ que es parte de la entrega 5.

- Caso de Hamiltoniano dado por el producto tensorial de dos grados de libertad, $H = A\otimes B$ con $A\,|a_i\rangle = a_i\,|a_i\rangle$. Trabajamos con el estado producto formado por un autoestado de A en un $\mathcal{H}_A$ y otra base en general, que puede ser de dimensión infinita y ser parte de L^2 (espacio de funciones de cuadrado integrable). Probaremos que el cálculo del operador de evolución sobre los estados producto llevan a evaluar la acción de $e^{-ia_iBt/\hbar}$ sobre dicha base. La base elegida para el grado de libertad continuo permite hacer que el cálculo sea

[1] Para probar la última igualdad de la ecuación podemos antes probar que $F(O_A \otimes \mathbb{I}) = F(O_A) \otimes \mathbb{I}_B$, expandiendo en serie la función $F(x) = \sum_n f_n x^n$, factorizando a la derecha $\mathbb{I}_B$.

manejable. En en el $\boxed{P15}$ tenemos que $B = p$ (operador impulso) y se usa una base de autoestados de posición $|x\rangle$. La exponencial $e^{-ia_i pt/\hbar}$ es el operador de traslaciones de coordenadas. En el $\boxed{P16}$ $B = z$ con base de autoestados de momento $|p_z\rangle$, la exponencial es el operador de traslaciones de momento. Para fijar ideas tomemos el caso del $\boxed{P15}$:

$$U(t,0)\,|a_i, z\rangle = e^{-i\frac{A\otimes p_z t}{\hbar}}\,|a_i\rangle \otimes |x\rangle = e^{-\frac{i a_i p_z t}{\hbar}}\,|a_i\rangle \otimes |x\rangle = |a_i\rangle \otimes |x + a_i t/\hbar\rangle\,.$$

donde se usó la acción del operador de traslaciones espaciales: $e^{-ipd/\hbar}\,|x\rangle = |x + d\rangle$. La evolución graba en la variable continua información del grado de libertad discreto. Se usa como un modelo de medición, denominado modelo de von Neumann. Veamos el detalle de esto.

---

2. Problema 14

Interacción spin–spin. Como hemos ya discutido en problemas y guías anteriores, una partícula con spin 12 posee un momento magnético. Por lo anto, si tenemos dos partículas de spin 12, aún en ausencia de un campo externo, tendremos una energía interacción de entre ellas de tipo dipolo–dipolo magnético. En este problema consideraremos los efectos cualitativos de esta de interacción, estudiando una versión simplificada de la interacción dipolar magnética dada por el Hamiltoniano

$$H = J\sigma_z \otimes \sigma_z,$$

con J una constante con unidades de energía que depende de los momentos dipolares de las partículas y de la distancia entre ellas. No obstante aquí consideramos un único término de la verdadera interacción dipolar magnética, cabe notar que este Hamiltoniano más sencillo no solo nos permitirá obtener cualitativamente un comportamiento del sistema análogo al del caso general, sino que en muchas situaciones prácticas la interacción dipolar magnética se puede reducir a un Hamiltoniano efectivo de esta forma.

(a) Escriba una base de autoestados de este Hamiltoniano. ¿Cuál es el espectro de energías? ¿Está degenerado?

(b) Suponga que inicialmente los dos spins se encuentran en el estado $|\Psi_0\rangle = |+,x\rangle \otimes |+,x\rangle$. Calcule entonces el estado a un tiempo posterior t, $|\Psi(t)\rangle$.

(c) Evalúe en particular la forma del estado a un tiempo $T = \pi\hbar/(4J)$. ¿Qué tipo de estado es el estado inicial? ¿Y el estado a tiempo T?

(d) Calcule la matriz densidad reducida del primer spin en función del tiempo. En particular, calcule la pureza de esta matriz densidad y grafíquela en función del tiempo. Analice e interprete la dinámica del entrelazamiento entre las partículas.

(e) Suponga que se quiere descibir la evolución temporal de la matriz densidad reducida del primer spin, sin hacer ninguna referencia al sistema global. ¿Puede ser esta evolución unitaria? ¿Por qué? ¿Vale la ecuación de Schrödinger para el primer spin por sí solo?

(a) Usamos el Hamiltoniano simplificado:

$$H = J\sigma_z \otimes \sigma_z$$

Este operador ya lo vimos y es el M_1. Es claro que una base de autoestados son la base producto de autoestados de σ_z (base computacional):

$$\begin{aligned}\{|00\rangle\,, |11\rangle\}, &\quad \text{autovalor} \;\; J\\ \{|01\rangle\,, |10\rangle\}, &\quad \text{autovalor} \;\; -J\end{aligned}$$

cada nivel de energía es doblemente degenerado.

(b) Estado inicial[2]:

$$
\begin{aligned}
|\Psi(0)\rangle &= |0_x\rangle \otimes |0_x\rangle \\
&= \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle + |01\rangle + |10\rangle)
\end{aligned}
$$

la evolución al tiempo t es:

$$
\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= e^{-iJ\sigma_z\otimes\sigma_z t/\hbar}\,|\Psi(0)\rangle \\
&= \frac{1}{2}[e^{-iJt/\hbar}(|00\rangle + |11\rangle) + e^{iJt/\hbar}(|01\rangle + |10\rangle)] \\
&= \frac{e^{-iJt/\hbar}}{2}[(|00\rangle + |11\rangle) + e^{2iJt/\hbar}(|01\rangle + |10\rangle)]
\end{aligned}
$$

(c) Al tiempo $T = \frac{\pi\hbar}{4J}$:

$$
|\Psi(T)\rangle = \frac{e^{-iJT/\hbar}}{2}[(|00\rangle + |11\rangle) + \underbrace{e^{i\pi/2}}_{i}(|01\rangle + |10\rangle)]
$$

Es posible probar que este estado es un estado entrelazado pues no se puede expresar como producto[3] El estado inicial es un estado producto (no entrelazado), por lo que este Hamiltoniano produce entrelazamiento (hay interacción entre las partes).

(d) Para escribir el operador densidad de este estado puro, necesitamos:

$$
\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= \frac{e^{-iJt/\hbar}}{2}[(|00\rangle + |11\rangle) + e^{2iJt/\hbar}(|01\rangle + |10\rangle)] \\
\langle\Psi(t)| &= \frac{e^{iJt/\hbar}}{2}[(\langle 00| + \langle 11|) + e^{-2iJt/\hbar}(\langle 01| + \langle 10|)] \\
\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| &= \frac{1}{4}[(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 11|) + (|01\rangle + |10\rangle)(\langle 01| + \langle 10|) + \\
& e^{-2iJt/\hbar}(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 01| + \langle 10|) + e^{2iJt/\hbar}(|01\rangle + |10\rangle)(\langle 00| + \langle 11|)]
\end{aligned}
$$

Para hallar la matriz densidad reducida al subsistema A, hallamos la traza de los operadores definidos en en el subsistema B (traza parcial en B):

$$
\begin{aligned}
\rho_A &= tr_B(\rho_{AB}) \\
&= \frac{1}{4}[(\underbrace{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}_{\mathbb{I}}) + (\underbrace{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}_{\mathbb{I}}) + e^{-2iJt/\hbar}(\underbrace{|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|}_{\sigma_x}) + e^{2iJt/\hbar}(\underbrace{|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|}_{\sigma_x})] \\
&= \frac{1}{2}[\mathbb{I} + \cos(2Jt/\hbar)\sigma_x]
\end{aligned}
$$

(d) Para hallar la pureza calculamos:

$$
\rho(t)_A^2 = \frac{1}{4}[\mathbb{I} + 2\cos(2Jt/\hbar)\sigma_x + \cos^2(2Jt/\hbar)\underbrace{\sigma_x^2}_{\mathbb{I}}]
$$

obteniendo para la pureza:

$$
tr(\rho^2(t)_A) = \frac{1}{2}[1 + \cos^2(2Jt/\hbar)]
$$

[2] $|+,x\rangle = |0_x\rangle$, con $\sigma_x\,|0_x\rangle = |0_x\rangle$

[3] Lo mas cercano sería el producto $(|0\rangle + i\,|1\rangle) \otimes (|0\rangle + i\,|1\rangle)$, que falla en un término.

la pureza va del máximo valor inicial 1 al valor mínimo 1/2, en forma periódica.

(e) Si hubiera un H_a debería haber un operador de evolución $U_A(t,0) = e^{-iH_a t/\hbar}$, tal que:

$$\rho_A(t) = U_A(t,0)\rho_A(0)U_A^\dagger(t,0)$$

obteniendo:

$$\rho_A^2(t) = U_A(t,0)\rho_A^2(0)U_A^\dagger(t,0)$$

por lo que usando la propiedad cíclica de la traza:

$$tr(\rho_A^2(t)) = tr(\rho_A^2(0))$$

y el sistema debería permanecer puro. Como no es el caso, entonces no hay una ecuación de Schrödinger para el subsistema.

3. Problema 15

Modelo de medición de von Neumann de primer tipo (versión simplificada). En el siguiente problema estudiaremos una versión simplificada del modelo de proceso de medición propuesto por von Neumann, en el que no sólo tendremos en cuenta el sistema a medir sino que también al aparato de medición, que se trata como un sistema cuántico adicional. La idea consiste en tratar de codificar los distintos valores y probabilidades del observable A que se quiere medir en una base de estados del aparato de medición que sean fácilmente distinguibles. En el ejemplo a estudiar, consideraremos el aparato de medición como un sistema de variable continua y utilizaremos su grado de libertad de posición para codificar la información deseada. Por simplicidad supondremos además que el observable A a medir es no degenerado, de forma tal que

$$A = \sum_i a_i \left|a_i\right\rangle\!\left\langle a_i\right|, \quad a_i \neq a_j, \text{ si } i \neq j.$$

Denotaremos al sistema cuyo observable queremos medir como $\mathcal{S}$, mientras que el sistema del aparato de medición será $\mathcal{M}$, de forma tal que el sistema total estará representado por el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{M}$. Para realizar la medición se evoluciona al sistema compuesto según una transformación unitaria

$$U = e^{-i\lambda A\otimes p/\hbar}.$$

donde p es el operador momento en $\mathcal{M}$ y λ es una constante conocida.

(a) Proponga un Hamiltoniano H del sistema total $\mathcal{H}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{M}$ tal que esta evolución unitaria corresponde a la evolución temporal por un cierto tiempo T.

(b) Calcule la acción de la transformación U sobre el estado $\left|a_i\right\rangle_\mathcal{S} \otimes \left|x = x_0\right\rangle_\mathcal{M}$, donde $\left|x = x_0\right\rangle_\mathcal{M}$ es un autoestado de la posición de $\mathcal{M}$ (estado no físico). ¿Cómo puede interpretar la acción de U? ¿Puede inferir el valor del autovalor a_i a partir de la posición de $\mathcal{M}$?

(c) Supongamos que el sistema auxiliar se encuentra inicialmente en un estado Gaussiano, $\left|0,\sigma\right\rangle_\mathcal{M}$, centrado en el origen y con varianza σ, es decir tal que

$$\left\langle x|0,\sigma\right\rangle_\mathcal{M} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\sigma^2}.$$

Calcule en tal caso $U\left|a_i\right\rangle_\mathcal{S} \otimes \left|0,\sigma\right\rangle_\mathcal{M}$. ¿Cómo puede interpretar la acción de U? ¿Cuál es la densidad de probabilidad en posición del sistema $\mathcal{M}$ luego de haber aplicado U? ¿Puede inferir el valor de a_i a partir de esta densidad de probabilidad?

(d) (*Opcional*) Suponga ahora que el estado inicial de $\mathcal{S}$ es un estado general $|\psi\rangle_{\mathcal{S}} = \sum_i c_i |a_i\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a_i si se mide A sobre $|\psi\rangle_{\mathcal{S}}$? Nuevamente el sistema auxiliar comienza en el mismo estado Gaussiano del ítem anterior, $|0,\sigma\rangle_{\mathcal{M}}$. Calcule el estado del sistema luego de la aplicación de U. ¿Cuál es la densidad de probabilidad de la posición de $\mathcal{M}$ luego de la acción de U? ¿Puede inferir los posibles valores de a_i y las probabilidades correspondientes? ¿Qué pasa en particular si se elige λ tal que $\lambda(a_{i+1} - a_i) \gg \sigma \ \forall i$?

(a) El sistema total (sistema $\mathcal{S}$ y aparato de medición $\mathcal{M}$) tiene un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{M}}$. Considerando la evolución unitaria propuesta podemos elegir

$$U(T,0) = e^{-i\lambda A\otimes p/\hbar} \quad \Longrightarrow \quad H = A \otimes p \quad \lambda = T$$

(b) Sea el estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |x = x_0\rangle_{\mathcal{M}}$

$$\begin{aligned}
|\Psi(T)\rangle &= e^{-i\frac{T}{\hbar}A\otimes p} |a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |x = x_0\rangle_{\mathcal{M}} \\
&= \left(\sum_n \frac{1}{n!}(-i\frac{T}{\hbar}A\otimes p)^n\right) |a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |x = x_0\rangle_{\mathcal{M}} \\
&= |a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes \sum_n \frac{1}{n!}(-i\frac{T}{\hbar}a_i p)^n |a_i\rangle \otimes |x = x_0\rangle_{\mathcal{M}} \\
&= |a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes \underbrace{e^{-i\frac{a_i T}{\hbar}p} |x = x_0\rangle_{\mathcal{M}}}_{|x=x_0+a_iT\rangle_{\mathcal{M}}}
\end{aligned}$$

por lo que obtenemos

$$\boxed{|\Psi(T)\rangle = |a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |x = x_0 + a_i T\rangle_{\mathcal{M}}}$$

El valor a medir se ha codificado en el estado del aparato $\mathcal{M}$. Midiendo la posición de $\mathcal{M}$, veremos que su posición se desplazó en $a_i T$ de donde podemos obtener (medir) a_i.

(c) Supongamos que ahora inicialmente el estado del aparato es una gausiana $|0,\sigma\rangle_{\mathcal{M}}$, centrada en el origen y con varianza σ^2. Calculemos nuevamente la evolución, ahora desde el estado inicial $\Psi(0) = |a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |0,\sigma\rangle_{\mathcal{M}}$,

$$|\Psi(T)\rangle = e^{-iA\otimes pT/\hbar} |a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |0,\sigma\rangle_{\mathcal{M}} = |a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes \underbrace{e^{-ia_iTp/\hbar} |0,\sigma\rangle_{\mathcal{M}}}_{|a_iT,\sigma\rangle_{\mathcal{M}}}$$

donde se usó la acción del operador de traslaciones espaciales: $e^{-ipd/\hbar} |0,\sigma\rangle = |d,\sigma\rangle$. Obteniendo entonces

$$\boxed{|\Psi(T)\rangle = |a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |a_i T,\sigma\rangle_{\mathcal{M}}}$$

proyectando en la representación de posición tenemos la función de onda del aparato de medición

$$\langle x|a_i T,\sigma\rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-(x-a_iT)^2/4\sigma^2}.$$

La probabilidad de encontrar la aguja del aparato de medición dentro de $[a_i - 2\sigma, a_i + 2\sigma]$ es 97 %, por lo que si $|a_{i\pm1} - a_i| >> 2\sigma/T$, se puede inferir (medir) con precisión a_i.

El $\boxed{P16}$ trata sobre el experimento de Stern-Gerlach, cuyo tratamiento es muy similar al que hemos presentado.

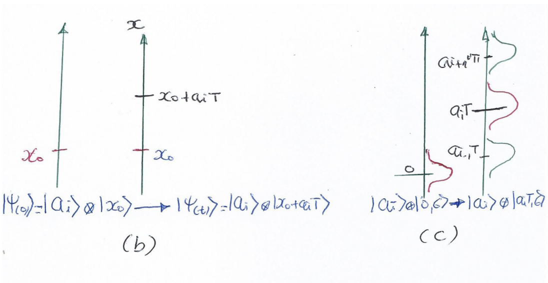

Figura 1: *Esquema de estados del sistema y el aparato de medición, antes y despues de la medición (evolución) para los casos (b) y (c).*