Física Teórica 2 - Guía 7: Momento angular y rotaciones

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

23 de mayo de 2024

1. Breve resumen: Operador de rotaciones

En Mecánica Cuántica, al igual que en Mecánica Clásica, el generador de rotaciones es el momento angular. Una rotación en el espacio de Hilbert está dada por el operador de rotaciones (unitario):

$$\mathcal{D}\left(R\right) = \exp\left(-i\,\frac{\boldsymbol{J}\cdot\hat{n}\phi}{\hbar}\right)$$

su acción sobre un estado $|\psi\rangle$:

$$|\psi'\rangle = \mathcal{D}\left(R\right)|\psi\rangle$$

Los valores medios de un operador vectorial $\boldsymbol{V}$ en estados rotados deben dar un vector en 3D, esto es una magnitud que transforma como un vector ante rotaciones $R = R(\hat{n}, \phi)$ (alrededor del eje $\hat{n}$ en un ángulo ϕ) como las componentes de los valores medios del operador vectorial $\boldsymbol{V}$ Esto puede ser considerado una definición de operador vectorial:

$$\langle\psi'|V_i|\psi'\rangle = \langle\psi|V_i'|\psi\rangle = \sum_j R_{ij}(\hat{n},\phi)\,\langle\psi|V_j|\psi\rangle$$

lo que lleva inmediatamente a la relación entre operadores:

$$V_i' = \mathcal{D}^\dagger\left(R\right)V_i\,\mathcal{D}\left(R\right) = \sum_j R_{ij}(\hat{n},\phi)V_j,$$

Vamos a hallar las relaciones de conmutación $[V_j, J_k]$, pidiendo que el operador rotado se comporte como un vector $3D$, para un ángulo $\delta\phi$ infinitesimal:

1.1. Rotación infinitesimal de un Vector 3D

Sabemos de Mecánica que una rotación infinitesimal $R(\hat{n}, \delta\phi)$ cambia el vector $\boldsymbol{V}$ a:

$$\boldsymbol{V}' \sim \boldsymbol{V} + \hat{n}\times\boldsymbol{V}\delta\phi + O(\delta\phi^2)$$

esta relación para el componente i es a orden $\delta\phi^2$:

$$V_i' \sim V_i + \epsilon_{ijk} n_j V_k \delta\phi$$

1.2. Rotación infinitesimal del Operador Vector

Usando $\mathcal{D}(R) = \exp\left(-i\,\frac{\boldsymbol{J}\cdot\hat{n}\delta\phi}{\hbar}\right) \sim \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{J}\cdot\hat{n}\delta\phi$, obtenemos para el operador rotado:

$$\begin{aligned} V_i' &\sim (\mathbb{I} + \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{J}\cdot\hat{n}\delta\phi)V_i(\mathbb{I} - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{J}\cdot\hat{n}\delta\phi) \\ &\sim V_i + \frac{i}{\hbar}[\boldsymbol{J}\cdot\hat{n}, V_i]\delta\phi \\ &\sim V_i + \frac{i}{\hbar}n_j[J_j, V_i]\delta\phi + O(\delta\phi^2) \end{aligned}$$

Igualando los factores que acompañan a n_j en las dos expresiones obtenemos:

$$[J_j, V_i] == -i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k = i\hbar\varepsilon_{jik}V_k$$

intercambiando i por j y viceversa:

$$[J_i, V_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$$

Claramente $\boldsymbol{J}$ es un operador vectorial pues satisface estas relaciones de conmutación, al igual que la posición $\boldsymbol{r}$ y el momento $\boldsymbol{p}$.

El producto escalar de dos operadores vectoriales es un escalar ante rotaciones:

$$\boldsymbol{V}'\cdot\boldsymbol{W}' = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W}$$

donde se usa $\boldsymbol{V}' = \mathcal{D}^\dagger(R)\,\boldsymbol{V}\,\mathcal{D}(R) = R\ \boldsymbol{V}$ (lo mismo para $\boldsymbol{W}'$) y la ortogonalidad de la matriz de rotaciones: $R\cdot R^t = \mathbb{I}$.

Del mismo modo se deduce una identidad similar para el producto escalar de un vector unitario 3D $\boldsymbol{a}$ por un operador vectorial $\boldsymbol{V}$, por ejemplo:

$$R\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \underbrace{R^tR}_{\mathbb{I}}\,\boldsymbol{a}\cdot R^t\boldsymbol{V} = \boldsymbol{a}\cdot R^t\boldsymbol{V} = \boldsymbol{a}\cdot\mathcal{D}(R)\,\boldsymbol{V}\,\mathcal{D}^\dagger(R) = \mathcal{D}(R)\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V})\,\mathcal{D}^\dagger(R)$$

donde se sacó afuera los operadores de rotación que actúan en el espacio de Hilbert. Ahora demostraremos que conocidos los autoestados del operador $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$, podemos encontrar el autoestado del operador $R\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ rotando el correspondiente autoestado de $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ sin cambiar su autovalor:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}\,|v_a\rangle &= v_a\,|v_a\rangle \\ \mathcal{D}(R)\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V})\,\underbrace{\mathcal{D}^\dagger(R)\,\mathcal{D}(R)}_{\mathbb{I}}\,|v\rangle_a &= \mathcal{D}(R)\,v_a\,|v_a\rangle \\ R\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}\,\mathcal{D}(R)\,|v_a\rangle &= v_a\,\mathcal{D}(R)\,|v_a\rangle \end{aligned}$$

Por ejemplo si tomamos $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{J}$ inferimos que rotar el autovector de una proyección de $\boldsymbol{J}$ en una dirección $\hat{a}$, genera un autovector de la proyección de $\boldsymbol{J}$ sobre el vector rotado $R\hat{a}$, con el mismo autovalor. Útil para el Problema 3.

Finalmente recordemos que los autoestados comunes de J^2 y J_z son:

$$\begin{aligned} J^2 \left|j, m\right\rangle &= j(j+1)\hbar^2 \left|j, m\right\rangle \\ J_z \left|j, m\right\rangle &= \hbar \left|j, m\right\rangle \end{aligned}$$

obtenidos usando los operadores de subida y bajada:

$$J_\pm \left|j, m\right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\hbar \left|j, m\right\rangle \qquad \text{con} \qquad J_\pm = J_x \pm i J_y$$

Para obtener las matrices de momento angular es útil calcular la matriz de J_+, luego la de $J_- = J_+^\dagger$ y finalmente $J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$ y $J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$.

2. Problema 1

Sean $\{V_x, V_y, V_z\}$ tres operadores. Decimos que V_i son las componentes de un *operador vectorial* si ante rotaciones V_i se transforma de la forma

$$\mathcal{D}^\dagger\left(R\right) V_i \, \mathcal{D}\left(R\right) = \sum_j R_{ij} V_j,$$

donde R es la matriz que define la rotación en $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{D}(R)$ el operador de rotación asociado en el espacio de Hilbert.

(a) Considere un estado arbitrario $|\psi\rangle$ de un sistema, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje $\hat{\boldsymbol{z}}$, es decir

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{z}}, \varphi) \, |\psi\rangle = \exp\left(-i \, \frac{J_z \varphi}{\hbar}\right) |\psi\rangle \, .$$

Calcule los valores medios $\langle\psi'|V_x|\psi'\rangle$, $\langle\psi'|V_y|\psi'\rangle$ y $\langle\psi'|V_z|\psi'\rangle$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle\psi|V_x|\psi\rangle$, $\langle\psi|V_y|\psi\rangle$ y $\langle\psi|V_z|\psi\rangle$ en el sistema original. Concluya que se cumple la definición de operador vectorial para $\boldsymbol{V}$. Use que las tres componentes del operador vectorial satisfacen:

$$[J_j, V_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl} V_l.$$

(b) Verifique que el operador de momento angular $\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$ es un operador vectorial.

Buscamos demostrar la fórmula de rotación para el caso particular de una rotación alrededor del eje z en ángulo finito ϕ.

(a) Por lo visto en la introducción basta averiguar que:

(I) Componente z: La componente V_z no cambia en esta rotación pues J_z conmuta con V_z:

$$\exp\left(i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)V_z\exp\left(-i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)=V_z$$

(II) Componente x: La componente x cambia en esta rotación. Usaremos el resultado del P11 de la Guía 2: $e^ABe^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]]+\ldots$, y los conmutadores: $[J_z,V_x]=i\hbar V_y$ y $[J_z,V_y]=-i\hbar V_x$

$$\begin{aligned}\exp\left(i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)V_x\exp\left(-i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right) &= V_x+(\frac{i\phi}{\hbar})[J_z,V_x]+(\frac{i\phi}{\hbar})^2\frac{1}{2!}[J_z,[J_z,V_x]]+\\ &(\frac{i\phi}{\hbar})^2\frac{1}{3!}[J_z,[J_z,[J_z,V_x]]]+...\\ &= V_x+(\frac{i\phi}{\hbar})(i\hbar V_y)+(\frac{i\phi}{\hbar})^2\frac{1}{2!}[J_z,[J_z,V_x]]+\\ &(\frac{i\phi}{\hbar})^2\frac{1}{3!}[J_z,[J_z,[J_z,V_x]]]+...\end{aligned}$$

todos los conmutadores alternan entre $\pm V_{\{x,y\}}$, por lo que la dependencia operatorial se factoriza obteniendo finalmente:

$$\exp\left(i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)V_x\exp\left(-i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)=\cos\phi V_x-\sin\phi V_y$$

(III) Del mismo modo se obtiene para la componente V_y:

$$\exp\left(i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)V_y\exp\left(-i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)=\sin\phi V_x+\cos\phi V_y$$

Por consiguiente los valores medios transforman ante rotaciones como las componentes del vector de valores medios.

(b) Si $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{J}$ se cumple igualmente pues son válidas las reglas de conmutación requeridas.

3. Problema 3

Considere un sistema de spin 1/2 (es decir $j=1/2$).

(a) Construya, por aplicación de los operadores de subida y bajada, la representación matricial de los operadores S^2, S_x, S_y y S_z en la base de autoestados de S_z. Muestre que se obtiene que los operadores de spin están dados por $S_i=\frac{\hbar}{2}\sigma_i$, donde σ_i son las matrices de Pauli.

(b) Usando resultados anteriores, muestre que el operador rotación para un sistema de spin 1/2 se puede escribir como

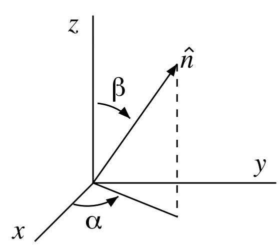
$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi) = \exp\left(-i\,\frac{\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\phi}{\hbar}\right) = \mathbb{I}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\sin\left(\frac{\phi}{2}\right),$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad.

(c) Escriba explícitamente la matriz de 2×2 que representa la rotación $\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)$ en la base

$$\left\{ |+\rangle \equiv \left| j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle, |-\rangle \equiv \left| j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} \right\rangle \right\}.$$

(d) Sea $\hat{\boldsymbol{n}}$ el versor definido por los ángulos polares α y β según se muestra en la figura. Aplique al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado† para obtener el estado $|\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}, +\rangle$, que representa un spin orientado según $\hat{\boldsymbol{n}}$. Compare el resultado con el obtenido en el Problema 10 de la Guía 1.



† Pruebe a hacer la cuenta de dos formas diferentes: (i) aplicando una única rotación en un ángulo y dirección adecuados, y (ii) descomponiendo la rotación en rotaciones elementales utilizando los ángulos de Euler.

(e) Muestre que para una rotación en $\phi = 2\pi$ se satisface

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi = 2\pi) = -\mathbb{I},$$

y, por lo tanto, ante una rotación en 2π el estado del sistema cambia según

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}},2\pi)]{} \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, 2\pi)\,|\psi\rangle = -\,|\psi\rangle\,.$$

Observe que no se obtiene el mismo vector debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pág. 24.

(a) Está en el apunte y se hizo en clase para el caso $j = 1$. Se basa en encontrar la matriz J_+ en la base que diagonaliza J_z (aplicando J_+ sobre cada elemento de la base). Luego se calcula la matriz de J_- haciendo el adjunto de J_+. Finalmente se usa que: $J_x = \frac{1}{2}(J_+ + iJ_-)$, $\tilde{J}_- = \frac{1}{2i}(J_+ - iJ_-)$.
(b) Considerando que el momento angular en un sistema de spin 1/2 es $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$,

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi) = \exp\left(-i\,\frac{\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\phi}{\hbar}\right) = \exp\left(-i\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\phi}{2}\right) = \mathbb{I}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\sin\left(\frac{\phi}{2}\right),$$

donde la última igualdad sale de expandir la exponencial y usar que todas las potencias pares $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n})^{2k} = \mathbb{I}$ y todas las potencias impares: $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n})^{2k+1} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}$ ($k \geq 0$ entero). Es conveniente obtener la matriz de este operador explícitamente en la base de autoestados de S_z. Dado que las únicas matrices que contribuyen a la diagonal son $\mathbb{I}$ y σ_z, y que σ_x y σ_y sólo contribuyen a los elementos no diagonales. Recordando las matrices de Pauli tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{n}, \phi) &= \mathbb{I}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\,(\sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} - i n_z \sin\frac{\phi}{2} & -i(n_x - i n_y)\sin\frac{\phi}{2} \\ -i(n_x + i n_y)\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} + i n_z \sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(d) Usaremos la propiedad por la cual los autoestados de una dada proyección de un operador vectorial $\boldsymbol{V}$: $|\hat{n}\cdot\boldsymbol{V} = v\rangle$, se pueden obtener por rotación del autoestado $|\hat{n}'\cdot\boldsymbol{V} = v\rangle$, siendo R la rotación que lleva de $\hat{n}'$ a $\hat{n}$: $\hat{n} = R\hat{n}'$:

$$|\hat{n}\cdot\boldsymbol{V} = v_n\rangle = \mathcal{D}(R)\,|\hat{n}'\cdot\boldsymbol{V} = v_{n'}\rangle \qquad \text{con} \qquad \hat{n} = R\hat{n}'$$

tal como se demostró en la introducción.

Las dos formas posibles son:
(i) Con una sola rotación del versor $\hat{z}$ hacia $\hat{n}$: rotación en ángulo β alrededor del eje (perpendicular a $\hat{z}$ y $\hat{n}$): $\hat{n}_R = (\cos(\alpha + \pi/2), \sin(\alpha + \pi/2), 0) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$):

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{S}\cdot\hat{n}\rangle &= e^{-i\hat{n}_R\cdot\boldsymbol{\sigma}\frac{\beta}{2}}\,|+\rangle \\ &= \cos\frac{\beta}{2}\,|+\rangle + \sin\frac{\beta}{2}^{i\alpha}\,|-\rangle\end{aligned}$$

un resultado que ya conocemos. Como la matriz de rotaciones se aplica sobre el estado $|+\rangle$, el resultado es la primera columna de la matriz de rotaciones, con los valores de ángulo $\phi = \beta$, y $\hat{n} = \hat{n}_R$ ya mencionados.
(ii) También podemos usar dos rotaciones: a) una primera en el eje y con ángulo β y la otra en el eje z con ángulo α. Se deja a les alumnes verificar el resultado, lo mismo que verificar el punto (e).

4. Antesala del Problema 4: Operador de rotaciones en término de ángulos de Euler

Una rotación $R(\hat{n}, \phi)$ se caracteriza por el eje de rotación $\hat{n}$ y el ángulo de rotación ϕ. En forma alternativa, se determina conocidos los tres ángulos de Euler $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. como la secuencia de rotaciones de la figura, y se escribe como

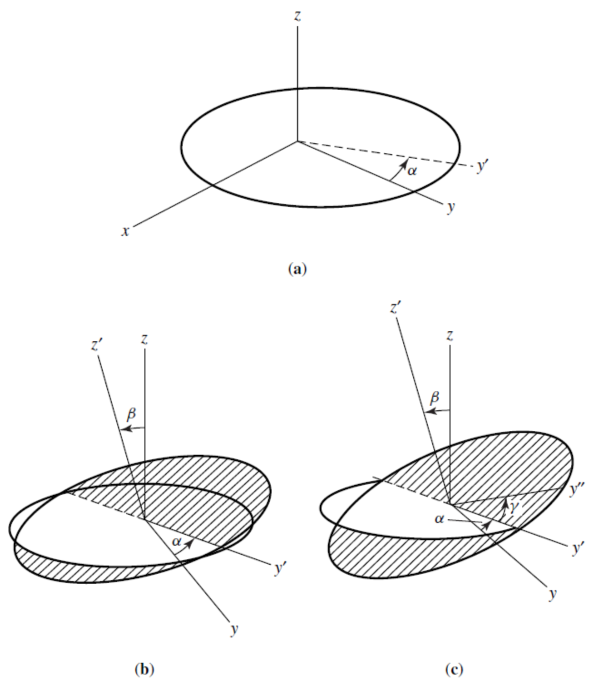


Figura 1: *Rotaciones con ángulos de Euler, notar a diferencia de Mecánica Clásica la segunda rotación es alrededor del eje y' (tomado del libro de LeBellac)*

el producto de matrices:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R(z', \gamma)R(y', \beta)R(z, \alpha)$$

En mecánica cuántica no es conveniente usar rotaciones alrededor de ejes como y' o z', es mejor expresar las rotaciones alrededor de ejes fijos x, y, z. Usaremos una propiedad de las rotaciones (usando la figura pueden convencerse de esto): la rotación $R(y', \beta)$, es equivalente a rotar $R^{-1}(z, \alpha)$ (llevar y' a y), luego rotar $R(y, \beta)$ y finalmente volver al eje de partida y' con una rotación $R(z, \alpha)$, por lo que:

$$R(y', \beta) = R(z, \alpha)R(y, \beta)R^{-1}(z, \alpha)$$

del mismo modo es claro que:

$$\begin{aligned}R(z',\beta) &= R(y',\beta)R(z,\gamma)R^{-1}(y',\beta)\\ &= \big(R(z,\alpha)R(y,\beta)R^{-1}(z,\alpha)\big)\,R(z,\gamma)\,\big(R(z,\alpha)R(y,\beta)R^{-1}(z,\alpha)\big)^{-1}\end{aligned}$$

donde se reemplaza la expresión anterior. Usando que la inversa de un producto es el producto en orden invertido de las inversas y simplificando se obtiene:

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R(z,\alpha)R(y,\beta)R(z,\gamma)$$

En el espacio de Hilbert la representación de las respectivas rotaciones obedece la ecuación consignada en el **Problema 4**:

$$\boxed{\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{D}(z,\alpha)\,\mathcal{D}(y,\beta)\,\mathcal{D}(z,\gamma)}$$

Antes de pasar al problema 4, tomando en cuenta que $[\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma), J^2] = 0$, concluimos que la acción de $\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma)$ sobre la base $|j,m\rangle$ no cambia el valor de j, por lo que la matriz del operador de rotaciones en esa base se puede expresar como una diagonal por bloques cuyos elementos de matriz son $\mathcal{D}^{(j)}(\alpha,\beta,\gamma)_{m,m'} = \langle j,m|\,\mathcal{D}\,|j,m'\rangle$ con $-j \leq m, m' \leq j$. Esta representación del grupo de rotaciones se dice irreducible, pues no es posible reducir adicionalmente la matriz de rotaciones en sub-bloques invariantes mas pequeños.

5. Problema 4

Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de spin 1/2 representada por

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{z}},\alpha)\ \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{y}},\beta)\ \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{z}},\gamma).$$

(a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z\alpha}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_y\beta}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_z\gamma}{2}\right)\\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

(a) Recordando que $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, y usando la relación conocida

$$\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{S}\cdot\hat{n}\phi}{\hbar}\right) = \exp(-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}\phi/2) = \cos(\phi/2)\mathbb{I} - i\sin(\phi/2)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}$$

Su acción sobre la base de autoestados $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de σ_z es una fase, para ambos casos, $\phi = \gamma$ y $\phi = \alpha$.

Adicionalmente necesitamos,

$$\exp(-i\sigma_y\beta/2) = \cos(\beta/2)\mathbb{I} - i\sin(\beta/2)\sigma_y$$

Aplicando sobre los elementos de la base en el orden requerido:

(i)

$$\exp(-i\sigma_z\gamma/2)\,|\pm\rangle = \exp(\mp i\gamma/2)\,|\pm\rangle$$

(ii)

$$\exp(-i\sigma_y\beta/2)\,(\exp(\mp i\gamma/2)\,|\pm\rangle) = \exp(\mp i\gamma/2)\,(\cos(\beta/2)\,|\pm\rangle - i\sin(\beta/2)(\pm i)\,|\mp\rangle)$$

(iii)

$$\begin{aligned}\exp(-i\sigma_z\alpha/2)\,[\exp(\mp i\gamma/2)\,(\cos(\beta/2)\,|\pm\rangle \pm \sin(\beta/2)\,|\mp\rangle)] &= \exp(\mp i\gamma/2)\exp(\mp i\alpha/2)\cos(\beta/2)\,|\pm\rangle \\ &\pm \exp(\mp i\gamma/2)\exp(\pm i\alpha/2)\sin(\beta/2)\,|\mp\rangle\end{aligned}$$

De donde se obtienen las dos columnas de la matriz de rotaciones buscada:

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Usando el resultado (c) del P3 la matriz de rotaciones dados el eje $\hat{n}$ y el ángulo ϕ de rotación es:

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{n},\phi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} - in_z\sin\frac{\phi}{2} & -i(n_x - in_y)\sin\frac{\phi}{2} \\ -i(n_x + in_y)\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} + in_z\sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}.$$

comparando ambos resultados obtenemos:

(i) Igualando las trazas:

$$2\cos\frac{\phi}{2} = 2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

(ii) restando el primer elemento diagonal del segundo:

$$2in_z\sin\frac{\phi}{2} = 2i\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

(iii) sumando los elementos extra-diagonales:

$$-2in_x\sin\frac{\phi}{2} = 2i\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

(iv) restando los elementos extra-diagonales:

$$2n_y\sin\frac{\phi}{2} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

Obteniéndose de estas ecuaciones el ángulo de rotación ϕ y las componentes del eje de rotación $\hat{n}$.