Fìsica Teórica 2 – 1er. cuatrimestre de 2023 – Primer parcial (18/05/2023)

(Justifique todas sus respuestas. Entregue los distintos problemas en hojas separadas. Ponga su nombre en todas las hojas. Se aprueba con 5,50 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50 % de su desarrollo correcto.)

1. Considere un espacio de Hilbert de dimensión cuatro y una base ortonormal de estados $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, |u_4\rangle\}$ en la que el Hamiltoniano $\hat{H}$ y tres operadores $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ toman la siguiente forma:

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \hat{B}|u_1\rangle = ib|u_2\rangle \\ \hat{B}|u_2\rangle = ib|u_1\rangle \\ \hat{B}|u_3\rangle = b|u_3\rangle \\ \hat{B}|u_4\rangle = -b|u_4\rangle \end{cases}$$

$$\hat{C} = c(|u_1\rangle\langle u_1| - |u_2\rangle\langle u_2| + i|u_3\rangle\langle u_4| - i|u_4\rangle\langle u_3|)$$

donde ω, a, b y c son constantes.

   a) ¿Cuáles de estos operadores podrían representar observables físicos? Entre ellos, ¿cuáles pueden ser diagonalizados en la misma base? ¿Qué combinaciones forman un conjunto completo de observables que conmutan (CCOC)? Justifique.
   b) Suponga que inicialmente el estado del sistema es $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(|u_2\rangle + \sqrt{2}|u_3\rangle + \sqrt{2}|u_4\rangle\right)$. Si se mide el observable $\hat{A}$ y se obtiene el resultado 0, ¿cuál es el estado del sistema inmediatamente después de la medición? Si inmeditamente despues se mide la energía, calcule la probabilidad de obtener el valor $\hbar\omega$. Determine el nuevo estado del sistema si se obtiene este valor de energía. Si se invirtiera el orden de las mediciones y se obtuvieran los mismos valores, ¿Cambiaría el estado final? Justifique.
   c) Considere ahora que no se hizo ninguna medición, calcule el valor medio y la varianza del operador $\hat{A}$ a tiempo t usando el mismo estado inicial que en *b)*.
   d) En alguna circunstancia podría ser relevante el operador $e^{\hat{A}^3+\hat{H}}$. Determine sus autoestados y valores propios.

2. Un sistema de dos spines acoplados A y B descriptos por el siguiente Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2}(3\hat{\sigma}_z \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{\sigma}_z) + \lambda(\hat{\sigma}_+ \otimes \hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_- \otimes \hat{\sigma}_+)$$

donde el primer factor del producto tensorial se refiere al sub-sistema A y el segundo a B. En la ecuación usamos la definición: $\hat{\sigma}_\pm = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)$.

   a) Escribir el Hamiltoniano en la base[1] $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Determine los dos autovectores y autovalores correspondientes que no dependen de λ.
   b) Introduciendo en $\hat{H}$ las nuevas variables: $\epsilon = \mu\cos\theta$ y $\lambda = \mu\sin\theta$. Encuentre los autovalores y autovectores de $\hat{H}$ que corresponden al subespacio bidimensional no incluido en *a)*, en función de θ y μ. **Ayuda.** Exprese el $\hat{H}$ en este subespacio usando $\hat{\vec{\sigma}} \cdot \hat{n}$, siendo $\hat{\vec{\sigma}} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ el vector de matrices de Pauli del sistema bidimensional, y $\hat{n}$ un vector unitario a determinar.

[1] Tomamos: $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle, ...$ y que $\hat{\sigma}_z|0\rangle = |0\rangle$, $\hat{\sigma}_z|1\rangle = -|1\rangle$.

c) Exprese la matriz densidad de estos dos autoestados. Determine las matrices densidad reducidas al subsistema A y al subsistema B.

d) Determine la pureza de las matrices reducidas como función de θ. ¿Para qué valor de este parámetro el entrelazamiento entre los subsistemas A yB es máximo?

3. Considere el Hamiltoniano de dos osciladores cuánticos acoplados

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}_1^2 + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}_2^2 + m\lambda^2\hat{x}_1\hat{x}_2$$

Con $0 \leq \lambda \leq \omega$ una constante real.

a) ¿Cómo son los autoestados del Hamiltoniano si $\lambda = 0$? ¿y sus autovalores?. (No hace falta deducirlos, si ya los conoce escríbalos y argumente en palabras porqué deben ser así)

b) Considere la transformación canónica:

$$\hat{Q}_1 = \frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{\sqrt{2}} \qquad \hat{Q}_2 = \frac{\hat{x}_2 + \hat{x}_1}{\sqrt{2}}$$
$$\hat{P}_1 = \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{\sqrt{2}} \qquad \hat{P}_2 = \frac{\hat{p}_2 + \hat{p}_1}{\sqrt{2}}.$$

Verifique que $[\hat{Q}_j, \hat{P}_k] = i\hbar\delta_{j,k}$. Justifique que $[\hat{Q}_j, \hat{Q}_k] = 0$ y que $[\hat{P}_j, \hat{P}_k] = 0$, por lo que se satisfacen relaciones de conmutación canónicas. Reescriba $\hat{H}$ en términos de estos nuevos operadores. ¿Que forma tiene el Hamiltoniano así reescrito?.

c) Determine los autoestados y autoenergías del problema acoplado ($\lambda > 0$). **Ayuda**. Puede usar operadores de número $\hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i$ definidos apropiadamente.

d) Encuentre la función de onda del estado fundamental en la representación de posición, en las coordenadas nuevas y en las coordenadas originales.