Física Teórica 2 - Atomos y campos e.m. en cavidades (QCED)

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

5 de junio de 2024

1. Problema 1

[*] **Interacción de un átomo con un campo clásico: oscilaciones de Rabi**. Consideremos un átomo que tiene dos niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$ con energías respectivas $E_g < E_e$. A los fines prácticos de este problema, nos podremos restringir solamente a mirar este subespacio de dimensión 2 del átomo, que actúa de esta forma como un sistema efectivo de dos niveles cuyo Hamiltoniano es

$$H_A = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z,$$

donde $\hbar\omega_a = E_e - E_g$ y $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$. El átomo se acopla con un campo eléctrico externo clásico que oscila con frecuencia ω_c, de forma tal que la interacción entre el electrón de átomo y el campo, en la aproximación dipolar, está dada por $H_{\text{int}} = -q\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}(t)$ donde $\boldsymbol{E}(t) = E_0\cos(\omega_c t + \phi)\hat{x}$ (q es de la carga del electrón). Esta interacción en la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ está dada por

$$H_{int} = \hbar\Omega\cos(\omega_c t + \phi)(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|).$$

Sin pérdida de generalidad, se consideró un campo que apunta en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$, por lo que $\Omega = |q|E_0\langle e| x |g\rangle$, notar que por simetría no hay elementos de matriz diagonales.

(a) Usando la representación de interacción y la aproximación de onda rotante, donde se desprecian los términos de oscilación rápida, pruebe que la interacción $H_{int,I}(t)$ está dada por

$$\begin{aligned}H_{int,I}(t) &= \hbar\omega\cos(\Omega_c t + \phi)(|e\rangle\langle g| e^{i\omega_a t} + |g\rangle\langle e| e^{-i\omega_a t}) \\ &\approx \hbar\frac{\Omega}{2}(|e\rangle\langle g| e^{i\Delta t - i\phi} + |g\rangle\langle e| e^{-i\Delta t + i\phi})\end{aligned}$$

donde $\Delta = \omega_a - \omega_c$ es el "detuning", y Ω es la constante que depende del momento dipolar del átomo y de la amplitud del campo.

(b) Suponga que inicialmente el átomo está en el estado excitado, $|\psi(0)\rangle = |e\rangle$. Para el caso particular de resonancia, es decir $\omega_a = \omega_c$ ($\Delta = 0$) calcule el estado a un tiempo t posterior y la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado en función del tiempo $P_e(t)$.

(c) Considere el operador de momento dipolar eléctrico, $d = \Delta(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|)$ (con Δ un número real con unidades de momento dipolar y cuyo valor depende del átomo), y calcule el valor medio en función del tiempo si inicialmente el átomo se encuentra en el estado excitado.

Solución

Este es el caso semiclásico. El átomo de dos niveles $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ es tratado cuánticamente y el campo electromagnético es tratado clásicamente. Esta descripción sirve para láseres, donde el número de fotones es muy grande.

(a) Del enunciado, considerando la interacción de campo eléctrico con el electrón en la aproximación dipolar, esta se expresa en la base de estados del átomo:

$$H_{int} = \hbar\Omega\cos(\omega_c t + \phi)(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|).$$

con $\Omega = |q|E_0 \langle e| x |g\rangle$. El hamiltoniano queda:

$$\begin{aligned} H =& H_0 + H_{int} \\ =& \frac{\hbar}{2}\omega_a\sigma_z + \hbar\Omega\cos(\omega_c t + \phi)(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|). \end{aligned}$$

donde $H_0 = H_a = \frac{\hbar}{2}\omega_a\sigma_z$.

En la representación de interacción se hace la transformación:

$$\begin{aligned} |\Psi_S(t)\rangle &= e^{-iH_0t/\hbar} |\Psi_I(t)\rangle \\ &= e^{-i\omega_a t\sigma_z} |\Psi_I(t)\rangle \end{aligned}$$

Veamos qué ecuación satisface $|\Psi_I(t)\rangle$, usando que $|\Psi_S(t)\rangle$ satisface la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_S(t)\rangle = (H_0 + H_{int})|\Psi_S(t)\rangle$$
$$i\hbar(-i\frac{H_0}{\hbar}e^{-iH_0t/\hbar} + e^{-iH_0t/\hbar}\frac{\partial}{\partial t})|\Psi_I(t)\rangle = (H_0 + H_{int}(t))e^{-iH_0t/\hbar}|\Psi_I(t)\rangle$$

Los términos con $H_0e^{-iH_0t/\hbar}$ se cancelan y se obtiene la ecuación de Schödinger en el cuadro de interacción:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_I(t)\rangle = H_{int,I}|\Psi_I(t)\rangle \qquad H_{int,I} = e^{iH_0t/\hbar}H_{int,I}e^{-iH_0t/\hbar}$$

remplazando tenemos

$$
\begin{aligned}
H_{int,I} &= \hbar\Omega\cos(\omega_c t+\phi)(e^{i\omega_a\sigma_z t/2}(|e\rangle\langle g|+|g\rangle\langle e|)e^{-i\omega_a\sigma_z t/2}\\
&= \hbar\Omega\cos(\omega_c t+\phi)(e^{i\omega_a t}\,|e\rangle\langle g|+e^{-i\omega_a t}\,|g\rangle\langle e|)\\
&= \hbar\frac{\Omega}{2}(e^{i(\omega_c t+\phi)}+e^{-i(\omega_c t+\phi)})(e^{i\omega_a t}\,|e\rangle\langle g|+e^{-i\omega_a t}\,|g\rangle\langle e|)\\
&\approx \hbar\frac{\Omega}{2}(\quad\underbrace{e^{i(\Delta t-\phi)}\,|e\rangle\langle g|}_{e^{i\Delta\sigma_z t/2}e^{-i\phi}|e\rangle\langle g|e^{-i\Delta\sigma_z t/2}}\quad+\quad\underbrace{e^{-i(\Delta t-\phi)}\,|g\rangle\langle e|}_{e^{i\Delta\sigma_z t/2}e^{i\phi}|g\rangle\langle e|e^{-i\Delta\sigma_z t/2}}\quad)
\end{aligned}
$$

donde se ha introducido el *detuning* o desintonía $\Delta=\omega_a-\omega_c$. En la última expresión se han despreciado los términos con $e^{\pm i(\omega_a+\omega_c)t}$, de alta frecuencia, cuya contribución, debido al carácter altamente oscilante promedia a cero. Esta es la Aproximación de Onda Rotante (en ingles RWA). La aproximación es buena si $\Delta\ll\omega_a+\omega_c$.

Hemos puesto en la última igualdad dos identidades que que $H_{int,I}$ es un operador independiente del tiempo que rota con velocidad angular Δ alrededor de un *pseudo-eje* z (por la presencia de σ_z en la exponencial). Esto sugiere pasar al sistema rotante:

$$|\Psi_I\rangle = e^{i\Delta\sigma_z t/2}\,|\Psi'(t)\rangle$$

Procediendo del mismo modo que antes, encontramos la ecuación de Schrödinger para $|\Psi'(t)\rangle$

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi'(t)\rangle &= \left(\hbar\frac{\Delta}{2}\sigma_z+\hbar\frac{\Omega}{2}(e^{-i\phi}\,|e\rangle\langle g|+e^{i\phi}\,|g\rangle\langle e|)\right)|\Psi'(t)\rangle\\
&= \left(\hbar\frac{\Delta}{2}\sigma_z+\hbar\frac{\Omega}{2}(\cos\phi\sigma_x+\sin\phi\sigma_y)\right)|\Psi'(t)\rangle\\
&= \hbar\frac{\Omega_R}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}\,|\Psi'(t)\rangle
\end{aligned}
$$

donde $\Omega_R=\sqrt{\Delta^2+\Omega^2}$ es la denominada frecuencia de Rabi y $\hat{n}=(\frac{\Omega}{\Omega_R}\cos\phi,\frac{\Omega}{\Omega_R}\sin\phi,\frac{\Delta}{\Omega_R})$ es un vector unitario. El Hamiltoniano en el sistema rotante no depende del tiempo y su solución es:

$$
\begin{aligned}
|\Psi'(t)\rangle &= e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}}\,|\Psi'(0)\rangle\\
&= \left(\cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\mathbb{I}-i\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}\right)|\Psi'(0)\rangle
\end{aligned}
$$

La solución en los cuadros de interacción y de Schödinger son:

$$
\begin{aligned}
|\Psi_I(t)\rangle &= e^{-i\frac{\Delta}{2}\sigma_z t}e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}}\,|\Psi(0)\rangle\\
|\Psi_S(t)\rangle &= e^{-i\frac{\omega_a}{2}\sigma_z t}e^{i\frac{\Delta}{2}\sigma_z t}e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}}\,|\Psi(0)\rangle\\
&= e^{-i\frac{\omega_c}{2}t\sigma_z}e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}}\,|\Psi(0)\rangle\\
&= e^{-i\frac{\omega_c}{2}t\sigma_z}\left(\cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\mathbb{I}-i\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}\right)|\Psi'(0)\rangle
\end{aligned}
$$

Notar que la última expresión da el operador de evolución en el esquema de Schrödinger

$$U(t) = e^{-i\frac{\omega_c}{2}t\sigma_z}\left(\cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\mathbb{I} - i\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}\right)$$

De esta expresión surge un modo mas directo de resolver el problema sin pasar por el cuadro de interacción, proponiendo:

$$|\Psi_S(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega_c}{2}t\sigma_z}|\Psi'(t)\rangle$$

Usando el Hamiltoniano original (sin RWA), una vez encontrado el H', entonces se usa la RWA, tirando los términos de alta frecuencia, quedando el Hamiltoniano independiente del tiempo ya encontrado. Es un buen ejercicio para les estudiantes. (b) Si $|\Psi(0)\rangle = |e\rangle$, usando el operador evolución temporal obtenemos:

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= e^{-i\frac{\omega_c}{2}t\sigma_z}\left(\cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\mathbb{I} - i\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}\right)|e\rangle \\
&= e^{-i\frac{\omega_c}{2}t\sigma_z}\left(\left((\cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) - i\frac{\Delta}{\Omega_R}\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\right)|e\rangle - i\frac{\Omega}{\Omega_R}\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)e^{i\phi}|g\rangle\right) \\
&= \left(\cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) - i\frac{\Delta}{\Omega_R}\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)\right)e^{-i\frac{\omega_c}{2}t}|e\rangle - i\frac{\Omega}{\Omega_R}\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)e^{i(\frac{\omega_c}{2}t+\phi)}|g\rangle
\end{aligned}$$

En resonancia $\Delta = 0$, por lo que $\Omega_R = \Omega$ y la probabilidad de estar en $|e\rangle$ en función del tiempo es:

$$P_e(t) = \cos^2(\frac{\Omega_R}{2}t)$$

alterna de estar con certeza en $|e\rangle$ a estar con certeza en $|g\rangle$, un tiempo $\tau = \frac{\pi}{\Omega_R}$ después.

(c) El valor medio del momento dipolar $d = \Delta'(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$ es en este caso

$$\begin{aligned}
\langle d\rangle &= \Delta'\left(\langle\Psi(t)|e\rangle\langle g|\Psi(t)\rangle + \langle\Psi(t)|g\rangle\langle e|\Psi(t)\rangle\right) \\
&= 2\Delta'\mathrm{Re}\left(\langle\Psi(t)|e\rangle\langle g|\Psi(t)\rangle\right) \\
&= 2\Delta'\mathrm{Re}\left(\cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)(-i)\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)e^{i(\omega_c t+\phi)}\right) \\
&= \Delta'\sin(\Omega_R t)\sin(\omega_c t+\phi)
\end{aligned}$$