Fìsica Teórica 2 – 1er. cuatrimestre de 2023 – Segundo parcial (6/07/2023)

(Justifique todas sus respuestas. Entregue los distintos problemas en hojas separadas. Ponga su nombre en todas las hojas. Se aprueba con 5,50 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50 % de su desarrollo correcto.)

1. Se tiene estados de momento angular orbital definido ℓ, y de spin 1/2. Recordando un ejercicio de la guía de Formalismo, se pueden definir los operadores de proyección $P_\pm$ sobre los subespacios con momento angular total definido $j_\pm = \ell \pm \frac{1}{2}$ $\quad$ $(\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S})$:

   $\mathrm{P}_+ = \frac{\hat{J}^2/\hbar^2 - j_-(j_-+1)}{j_+(j_++1) - j_-(j_-+1)}, \qquad P_- = \frac{\hat{J}^2/\hbar^2 - j_+(j_++1)}{j_-(j_-+1) - j_+(j_++1)}$

   a) Verifique que estos operadores son proyectores sobre los subespacios de momento angular total $j_\pm = \ell \pm \frac{1}{2}$. Esto es, aplique $P_\pm$ sobre un estado $|\Psi\rangle = \alpha_+ |j_+; \ell, s = 1/2\rangle + \alpha_- |j_-; \ell, s = 1/2\rangle$ y vea que se obtiene la parte correspondiente de la función de onda.

   b) Probar que estos operadores de proyección se pueden expresar para estados de momento angular orbital definido ℓ, y de spin 1/2 como :

   $$P_+ = \frac{\ell + 1 + 2\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}/\hbar^2}{2\ell + 1}, \qquad P_- = \frac{\ell - 2\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}/\hbar^2}{2\ell + 1}$$

   c) Dado que estos proyectores conmutan con L_z, S_z y J_z, entonces la aplicación de $P_\pm$ no cambia los autovalores de L_z y S_z. Por consiguiente : $|j = \ell - 1/2, m_j = m_\ell + m_s; \ell, s = 1/2\rangle = NP_- |\ell, s = 1/2; m_\ell, m_s\rangle$, con N una constante de normalización. Obtenga de esta manera el estado normalizado: $|j = 1/2, m_j = 1/2; \ell = 1, s = 1/2\rangle$

   d) Suponga que el sistema se encuentra en un estado con $\ell = 5$, $m_\ell = 4$, y $m_s = \frac{1}{2}$. Diga qué valores de momento angular total (j) se pueden medir, y con qué probabilidades. *Ayuda*: $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = L_z S_z + \frac{1}{2}(L_+S_- + L_-S_+)$

2. El modelo de Jaynes-Cummings usa la aproximación de onda rotante (RWA) y es bastante razonable para un sistema formado por un átomo de dos niveles interactuando con un campo em cuantizado. Hace un tiempo que se cuenta con dispositivos superconductores de estado sólido que se comportan de manera similar al sistema mencionado. En estos casos la RWA puede dejar de ser válida para los parámetros usualmente disponibles y se requiere mejores aproximaciones. Usando una nueva notación se tiene:

   $$\hat{H}_{Rabi} = -\frac{1}{2}\hbar\Omega\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda\hat{\sigma}_x(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

   a) Justifique que si se hace una rotación del sistema en $-\pi/2$ generada por $\hat{\sigma}_y$ se obtiene

   $$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\Omega\hat{\sigma}_x + \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda\hat{\sigma}_z(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

   A partir de ahora se usa esta expresión de $\hat{H}$. Para el caso en que λ y ω_0 son mucho mas grandes que Ω tiene sentido pensar en que el sistema de dos niveles puede ser tratado como una perturbación y la parte que involucra al oscilador como Hamiltoniano no perturbado:

   $$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \qquad \hat{H}_0 = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda\hat{\sigma}_z(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \qquad \hat{V} = \frac{1}{2}\hbar\Omega\hat{\sigma}_x$$

   b) Escriba las ecuaciones que satisfacen $|\phi_{n_+}\rangle$ y $|\phi_{n_-}\rangle$, si se propone como autoestados de $\hat{H}_0$ a:

   $$|\Phi_{n_\pm}\rangle = |\pm\rangle \otimes |\phi_{n_\pm}\rangle$$

siendo $|\pm\rangle$ autoestados de $\hat{\sigma}_z$ con autovalores ± 1. Justifique que los $|\phi_{n\pm}\rangle$ son autoestados de Hamiltonianos correspondientes a osciladores desplazados en direcciones opuestas (para verlo puede volver a usar operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$ y completar cuadrados, no necesita evaluar el monto exacto del desplazamiento.)

En el siguiente item puede usar las soluciones:

$$|\phi_{n\pm}\rangle = |n_\pm\rangle = e^{\mp(\lambda/\omega_0)(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}\,|n\rangle \qquad\qquad E_{n_+} = E_{n_-} = E_n = \hbar\omega_0\left(n - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}\right)$$

siendo $|n\rangle$ autoestador de $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, $n = 0, 1, 2, ...$

c) Aplique la teoría de perturbaciones a los niveles de energía E_n y encuentre los estados a orden cero $\Psi^{(0)}_{\pm,n}$ y las energías a orden uno en la perturbación. Exprese en términos de $\langle n_+|n_-\rangle = \langle n_-|n_+\rangle$ (reales).

3. Dos partículas idénticas de masa m_0 y spin 1 se mueven sobre la superficie de una esfera de radio R. El hamiltoniano está dado por $H = L_1^2/2I + L_2^2/2I$, donde $\vec{L}_i$ es el momento angular de la partícula $i = 1, 2$ e $I = m_0 R^2$ el repectivo momento de inercia. **Ayuda**. Puede considerar acoplar espines usando la Tabla de CG (los estados de spin total son simétricos o antisimétricos ante intercambio de partículas).

   a) Encuentre el autovalor de la energía correspondiente al estado de energía más baja. ¿Qué degeneración tienen? Determine una base de autoestados. (No escriba de más.)

   b) Encuentre el autovalor de la energía correspondiente al primer nivel excitado. ¿Qué degeneración tienen? Determine una base de autoestados. (No escriba de más.)

   c) Si se enciende un campo magnético en la dirección $\hat{z}$ la interacción perturbativa es $V = \mu B_0(L_{z_1} + L_{z_2} + 2S_{z_1} + 2S_{z_2})$ encuentre qué estados del nivel fundamental cambian su energía. Calcule las nuevas energías (note que los estado siguen siendo autoestados del nuevo Hamiltoniano), justifique.