P8 **Hamiltoniano efectivo dispersivo de Jaynes–Cummings.** Considere el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings en el régimen dispersivo (ver problema **P3**).

(a) Muestre que en este límite, el Hamiltoniano se puede reducir a un Hamiltoniano efectivo dado por

$$H_{\text{eff}} = H_A + H_C + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z \otimes (a^\dagger a + 1) = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z \otimes (a^\dagger a + 1)\,.$$

Interprete.

(b) Muestre que $[\sigma_z, H_{\text{eff}}] = 0$, $[a^\dagger a, H_{\text{eff}}] = 0$ y $[\sigma_z, a^\dagger a] = 0$. ¿Qué significa esto?

(c) Suponga que el sistema se encuentra en un autoestado del Hamiltoniano. Muestre entonces que midiendo la frecuencia del modo en la cavidad se puede inferir el estado del átomo. A su vez, muestre que midiendo el estado del átomo se puede inferir el número de fotones en la cavidad.

(d) Suponga que inicialmente la cavidad de encuentra en un estado coherente $|\alpha\rangle$ y el átomo entra a la cavidad en el estado $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$. Calcule el estado del sistema a un tiempo t posterior. Interprete. Calcule además la matriz densidad reducida del átomo en función del tiempo y verifique que se tiene un estado entrelazado entre el átomo y el campo de la cavidad.

→ si es +1 en H_{eff} queda un término $\propto |g\rangle\langle g| \otimes \mathbb{1}$

→ si es +1/2 " " " " $\propto \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}$

yo lo resolví así

Del Problema 3....

→ El Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings:

$$\boxed{H_{JC} = H_A + H_C + H_{int} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) - \frac{i\Omega}{2}\left(\sigma_+ a - \sigma_- a^+\right)}$$

→ El régimen dispersivo es: $|\Delta| \gg \Omega$ donde $\Delta = \omega_a - \omega_c$

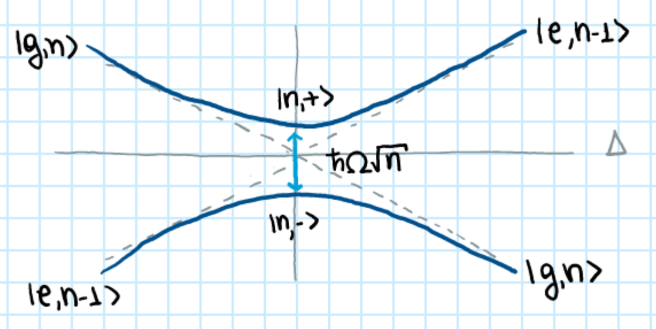
↳ frecuencias muy distintas

- En éste régimen, los niveles de energía se separan

(*) $$\boxed{\mathcal{E}_{n\pm} \sim \hbar\omega_c n \pm \frac{\hbar}{2}\Delta\left(1 + \frac{n\Omega}{2\Delta^2}\right)}$$ (*)

(*)
$$\mathcal{E}_{n\pm} = \hbar\omega_c n \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2 n} = \hbar\omega_c n \pm \frac{\hbar\Delta}{2}\sqrt{1 + \frac{\Omega^2 n}{\Delta^2}} \quad \frac{\Omega}{\Delta} \ll 1$$
$$\approx \hbar\omega_c n \pm \frac{\hbar\Delta}{2}\left(1 + \frac{\Omega^2 n}{\Delta^2}\right)$$

- Según el signo de Δ ...
  - $\Delta > 0$ $(\omega_a > \omega_c)$ ⟶ $|n,+\rangle = |e,n-1\rangle$ $|n,-\rangle = i|g,n\rangle$
  - $\Delta < 0$ $(\omega_a < \omega_c)$ ⟶ $|n,+\rangle = i|g,n\rangle$ $|n,-\rangle = -|e,n-1\rangle$



(a)

→ Asumimos $\Delta > 0$.

→ A partir de los niveles de energía (*), escribimos el Hamiltoniano en su descomposición espectral:

$$H_J \simeq \sum_{n\geq 0}\hbar\left(\omega_c n + \frac{\Delta}{2} + \frac{\Omega^2}{4\Delta}n\right)|e,n-1\rangle\langle e,n-1| + \sum_{n\geq 1}\hbar\left(\omega_c n - \frac{\Delta}{2} - \frac{\Omega^2}{4\Delta}n\right)|g,n\rangle\langle g,n| - \frac{\hbar\Delta}{2}|g,0\rangle\langle g,0|$$ término del fundamental

reacomodamos la sumatoria para q' empiecen en n=0

$$= \sum_{n\geq 0}\hbar\left(\omega_c(n+1) + \frac{\Delta}{2} + \frac{\Omega^2}{4\Delta}(n+1)\right)|e,n\rangle\langle e,n| + \sum_{n\geq 0}\hbar\left(\omega_c n - \frac{\Delta}{2} - \frac{n\Omega^2}{4\Delta}\right)|g,n\rangle\langle g,n|$$

usamos que $\Delta = \omega_a - \omega_c$

$$= \sum_{n\geq 0}\hbar\left(\omega_c(n+1/2) + \frac{\omega_a}{2} + \frac{(n+1)\Omega^2}{4\Delta}\right)|e,n\rangle\langle e,n| + \sum_{n\geq 0}\hbar\left(\omega_c(n+1/2) - \frac{\omega_a}{2} - \frac{n\Omega^2}{4\Delta}\right)|g,n\rangle\langle g,n|$$

separamos convenientemente los términos

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{\hbar\omega_a}{2}\underbrace{\left(|e,n\rangle\langle e,n| - |g,n\rangle\langle g,n|\right)}_{\sigma_z\otimes\mathbb{1}} + \sum_{n\geq 0}\hbar\omega_c\underbrace{(n+1/2)\left(|e,n\rangle\langle e,n| + |g,n\rangle\langle g,n|\right)}_{\mathbb{1}\otimes(a^+a+1/2)}$$
$$+ \sum_{n\geq 0}\hbar(n+1/2)\frac{\Omega^2}{4\Delta}|e,n\rangle\langle e,n| + \sum_{n\geq 0}\frac{\hbar\Omega^2}{8\Delta}|e,n\rangle\langle e,n| - \sum_{n\geq 0}\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}(n+1/2)|g,n\rangle\langle g,n| +$$
$$+ \sum_{n\geq 0}\frac{\hbar\Omega^2}{8\Delta}|g,n\rangle\langle g,n|$$

$\sigma_z\otimes(a^+a+1/2)$

$\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}$

Identificamos los operadores:

$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$

$a^+a = |n\rangle\langle n|$

$$\boxed{H_{eff} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z\otimes\mathbb{1} + \hbar\omega\,\mathbb{1}\otimes(a^+a+1/2) + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z\otimes(a^+a+1/2) + \underbrace{\frac{\hbar\Omega^2}{8\Delta}\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}}_{\text{constante}}}$$

(b)

- $[\sigma_z, a^+a] = [\sigma_z\otimes\mathbb{1}, a^+a\otimes\mathbb{1}] = (\sigma_z\otimes\mathbb{1})(\mathbb{1}\otimes a^+a) - (\sigma_z\otimes\mathbb{1})(\mathbb{1}\otimes a^+a) = \sigma_z\otimes a^+a - \sigma_z\otimes a^+a = 0$
- $[\sigma_z, \sigma_z] = 0$
- $[a^+a, a^+a] = 0$

↳ Y con esto es fácil ver que:

- $[\sigma_z, H_{eff}] = 0$
- $[a^+a, H_{eff}] = 0$

↳ Esto significa que se puede medir H_{eff}, σ_z, y a^+a simultaneamente.

(c)

→ Si el sistema se encuentra en un autoestado del Hamiltoniano ⇒ sabemos su energía:

$$\mathcal{E}_{n\pm} \sim \hbar\omega_c n \pm \frac{\hbar}{2}\Delta\left(1 + \frac{n\Omega}{2\Delta^2}\right)$$

→ Si se mide el número de fotones y da n, se puede saber si el átomo está en el estado $|g\rangle$ o $|e\rangle$.

→ De forma análoga, midiendo el estado del átomo, se puede saber el número de fotones.

(d)

→ Consideramos que inicialmente:

$$|\Psi(0)\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)}_{\text{átomo}}\otimes\underbrace{|\alpha\rangle}_{\text{cavidad}}$$

estado coherente: $|\alpha\rangle = \sum_{n\geq 0} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$

→ Como el Hamiltoniano es independiente del tiempo, el estado del sistema a todo tiempo:

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle \qquad \text{con} \quad U(t) = e^{-iH_{eff}t/\hbar}$$
$$= e^{-iH_{eff}t}\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)\otimes|\alpha\rangle$$
$$= \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2}}\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\Big(\underbrace{e^{-iH_{eff}t}|e,n\rangle}_{e^{-iE^+_{n+1}t}|e,n\rangle} + \underbrace{e^{-iH_{eff}}|g,n\rangle}_{e^{-iE^-_n t}|g,n\rangle}\Big)$$

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2}}\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left(e^{-iE^+_{n+1}t}|e,n\rangle + e^{-iE^-_n t}|g,n\rangle\right)}$$

→ La matriz densidad total es: $[\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|]$

→ La matriz densidad (reducida) del átomo es:

coeficientes de la matriz

$$\rho_a(t) = tr_c(\rho(t)) = \sum_{s,s'}\rho_{ss'}|s\rangle\langle s'| \quad \text{donde} \quad \rho_{ss'} = \sum_{n\geq 0}\langle s,n|\rho(t)|s',n\rangle = \sum_{n\geq 0}\underbrace{\langle s,n|\Psi(t)\rangle}_{(*)}\underbrace{\langle\Psi(t)|s',n\rangle}_{(*)}$$

(*) $$\langle s,n|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2}}\sum_{k\geq 0}\frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}\left(e^{-iE^+_{k+1}t}\langle s,n|e,k\rangle + e^{-iE^-_k t}\langle s,n|g,k\rangle\right)$$
$$= \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left(e^{-iE^+_{n+1}t}\delta_{se} + e^{-iE^-_n t}\delta_{sg}\right)$$

(*) $$\langle\Psi(t)|s',n\rangle = \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left(e^{iE^+_{n+1}t}\delta_{s'e} + e^{iE^-_n t}\delta_{s'g}\right)$$

$$\Rightarrow \rho_{ss'}(t) = \sum_{n\geq 0}\frac{e^{-|\alpha|^2}}{2}\frac{\alpha^{2n}}{n!}\left(e^{-iE^+_{n+1}t}\delta_{se} + e^{-iE^-_n t}\delta_{sg}\right)\left(e^{iE^+_{n+1}t}\delta_{s'e} + e^{iE^-_n t}\delta_{s'g}\right)$$
$$= \sum_{n\geq 0}\frac{e^{-|\alpha|^2}}{2}\frac{\alpha^{2n}}{n!}\left(\delta_{se}\delta_{s'e} + e^{i(E^-_n - E^+_{n+1})t}\delta_{se}\delta_{s'g} + e^{-i(E^-_n - E^+_{n+1})t}\delta_{sg}\delta_{s'e} + \delta_{sg}\delta_{s'g}\right)$$

$$\left[\rho_{ss'}(t) = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{2}\underbrace{\sum_{n\geq 0}\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}}_{e^{|\alpha|^2}}\left(\delta_{se}\delta_{s'e} + \delta_{sg}\delta_{s'g}\right) + \frac{1}{2}e^{-|\alpha|^2}\sum_{n\geq 0}\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}e^{i(E^-_n - E^+_{n+1})t}\delta_{se}\delta_{s'g} + \frac{1}{2}e^{-|\alpha|^2}\sum_{n\geq 0}\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}e^{-i(E^-_n - E^+_{n+1})t}\delta_{sg}\delta_{s'g}\right]$$

→ Definimos convenientemente:

$$f(t) = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n\geq 0}\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}e^{i(E^-_n - E^+_{n+1})t}$$

→ Y entonces la matriz densidad reducida queda:

$$\boxed{\rho_a(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & f(t) \\ f^*(t) & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_a^2(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 + |f(t)|^2 & 2f(t) \\ 2f^*(t) & 1 + |f(t)|^2 \end{pmatrix}}$$

→ Entonces la pureza: $\eta = tr(\rho_a^2(t)) = \frac{1}{2}\left(1 + |f(t)|^2\right)$

$$|f(t)| = \left|\sum_{n\geq 0}e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{2n}}{n!}e^{i(E^-_n - E^+_{n+1})t}\right| \leq \sum_{n\geq 0}e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{2n}}{n!} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$$

⇒ Hay entrelazamiento.