I. Mediciones

1 Una partícula con spin 1 tiene un momento angular intrínseco que puede tomar los valores $+\hbar, 0, -\hbar$. Representaremos este sistema físico mediante un espacio de Hilbert de dimensión 3. Dada una base ortonormal de este espacio, $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$, definimos los operadores

$$L_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = -i\hbar\,|a\rangle\langle c| + i\hbar\,|c\rangle\langle a|\,, \quad \begin{cases} L_z\,|a\rangle = \hbar\,|b\rangle\,, \\ L_z\,|b\rangle = \hbar\,|a\rangle\,, \\ L_z\,|c\rangle = 0 \end{cases}$$

(a) Verifique que los tres operadores L_j $(j = x, y, z)$ representan observables (es decir son operadores Hermíticos).

(b) Muestre que los tres operadores, L_j, tienen los mismos autovalores: $m_j = 1, 0, -1$ (en unidades de $\hbar$). Calcule además los correspondientes autovectores para cada uno de los observables.

(c) Verifique que estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación $[L_j, L_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}L_l$.

(d) Discuta cómo se prodrían medir los valores m_x, m_y o m_z de los distintos operadores L_x, L_y, L_z usando un aparato de Stern–Gerlach.

(e) Suponga que se prepara un estado con $m_x = 0$ y se mide L_y, ¿cuáles son los resultados posibles y cuáles son sus respectivas probabilidades? Suponga que se obtiene como resultado $m_y = 1$, escriba el estado del sistema después de la medición.

(f) A continuación se mide L_x, ¿cuáles son los resultados posibles y cuáles sus probabilidades? Si se obtiene el resultado $m_x = -1$, escriba el estado después de la medición.

2 Considere un sistema físico cuyo espacio de estados es de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. Sean $B = b\,|1\rangle\langle 1| + a\,|2\rangle\langle 3| + a\,|3\rangle\langle 2|$ y $A = a\,|1\rangle\langle 1| - ia\,|2\rangle\langle 3| + ia\,|3\rangle\langle 2|$ (con a y $b \in \mathbb{R}$) dos observables y suponga que el sistema se encuentra inicialmente en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\,|1\rangle + \frac{1}{2}\,|2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|3\rangle$$

(a) Calcule los autoestados y autovalores de B. ¿Está degenerado el espectro de B?

(b) Escriba $|\psi\rangle$ en una base de autoestados de B.

(c) Si se mide B sobre el estado $|\psi\rangle$, ¿qué resultados puede obtener y con qué probabilidad?

(d) Si el resultado de la medición del ítem anterior fuese $-a$, escriba el estado del sistema después de la medición. Si en cambio el resultado de la medición hubiese sido a, ¿cuál sería el estado del sistema luego de la medición?

(e) Desarrolle los ítems anteriores reemplazando B por el observable A.

(f) Ahora con el mismo estado inicial $|\psi\rangle$ se mide primero B y luego A obteniéndose $\{a, -a\}$, calcule la probabilidad de este resultado. Luego se mide primero A y luego B con el mismo estado inicial $|\psi\rangle$, ¿es posible encontrar como resultado el par $\{-a, a\}$? si es así ¿con qué probabilidad?. ¿Son los operadores B y A compatibles?

3 Considere un sistema cuántico descripto por un espacio de estados de dimensión 3. Sea $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ una base ortonormal y considere los observables

$$\begin{aligned} A &= a\,|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + a\,|\phi_2\rangle\langle\phi_2| - a\,|\phi_3\rangle\langle\phi_3|\,, \\ B &= b\,|\phi_1\rangle\langle\phi_2| + b\,|\phi_2\rangle\langle\phi_1| + b\,|\phi_3\rangle\langle\phi_3|\,, \\ C &= c\,|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + c\,|\phi_2\rangle\langle\phi_3| + c\,|\phi_3\rangle\langle\phi_2|\,, \end{aligned}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se sabe además que el sistema se encuentra inicialmente en el estado

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,|\phi_1\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}}\,|\phi_2\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\,|\phi_3\rangle$$

(a) Calcule $[A, B]$ y $[A, C]$. ¿Cuáles de estos pares de observables son compatibles?

(b) I- Suponga que primero se mide el observable A sobre el estado $|\psi_0\rangle$ y se obtiene como resultado a, ¿cuál es el estado después de la medición y cuál es la probabilidad de que esto ocurra? A continuación, (suponiendo el resultado a de la primer medición) se mide el observable B, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad? ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación de resultados $\{a, -b\}$?

II- Suponga ahora que, en cambio, primero se mide sobre el estado $|\psi_0\rangle$ el observable B. Si se obtiene el resultado $-b$, escriba entonces el estado luego de la medición (¿cuál es la probabilidad correspondiente?) A continuación se mide A, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad? ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación de resultados $\{-b, a\}$?

(c) I- Suponga que primero se mide el observable A sobre el estado $|\psi_0\rangle$ y se obtiene como resultado a, ¿cuál es el estado después de la medición y cuál es la probabilidad de que esto ocurra? A continuación, (suponiendo el resultado a de la primer medición) se mide el observable C, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad? ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación de resultados $\{a, -c\}$?

II- Suponga ahora que, en cambio, primero se mide sobre el estado $|\psi_0\rangle$ el observable C. Si se obtiene el resultado $-c$, escriba entonces el estado luego de la medición (¿cuál es la probabilidad correspondiente?) A continuación se mide A, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidad? ¿Cuál es la probabilidad de obtener la combinación de resultados $\{-c, a\}$?

(d) ¿Cómo se relacionan los resultados obtenidos en los ítems (b) y (c) con lo encontrado en (a)?

4 **Distinguibilidad de estados.** Considere un sistema físico que se sabe está en uno de dos posibles estados, $|\alpha\rangle$ o $|\beta\rangle$.

(a) Suponga que $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son ortogonales. ¿Es posible, en principio, realizar alguna medición sobre el sistema cuyo resultado permita distinguir con certeza entre los dos estados? De ser posible, defina algún observable que permita distinguir los dos estados.

(b) Considere ahora que los dos estados $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ no son ortogonales. ¿Puede ahora definir algún observable que distinga con certeza los dos estados? ¿Por qué?

(c) En base a lo obtenido en los ítems anteriores discuta la veracidad y el significado de la siguiente afirmación: *los únicos estados cuánticos distinguibles con certeza son los estados mutuamente ortogonales.*

(d) Cuantifiquemos ahora cuán distinguibles son dos estados considerando en primer lugar un espacio de dimensión 2 donde $|\alpha\rangle = |+, \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}\rangle$ y $|\beta\rangle = \left|+, \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{b}}\right\rangle$ dos vectores autoestados de la proyección del operador $\boldsymbol{\sigma}$ en dos direcciones arbitrarias $\hat{\boldsymbol{a}}$ y $\hat{\boldsymbol{b}}$. Suponga que uno se conforma con distinguir los estados con una cierta probabilidad midiendo $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$: si obtiene $+1$ lo asocia con el estado $|+, \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}\rangle$ y si obtiene -1, con el estado $\left|+, \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{b}}\right\rangle$.

Se define la probabilidad de éxito a la probabilidad de: medir $+1$ y que la partícula esté en $|+, \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}\rangle$ ó medir -1 y que la partícula esté en $\left|+, \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{b}}\right\rangle$. ¿Cual es la estrategia que debe seguir para maximizar la probabilidad de éxito?.

Demuestre que la máxima probabilidad éxito es $P_{max} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \hat{\boldsymbol{a}}\cdot\hat{\boldsymbol{b}}}\right)$, encuentre la dirección $\hat{\boldsymbol{n}}$ correspondiente. Interprete el resultado.

Finalmente, argumente por qué estos resultados siguen siendo los mismos para el caso en que $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ pertenecen a un espacio de dimensión arbitraria.

5 **Criptografía Cuántica – Distribución Cuántica de Claves: Protocolo BB84.**
Consideremos un escenario en el cual tenemos dos personas: Alice y Bob. Alice prepara en un laboratorio partículas de spin 1/2 (alternativamente se puede usar la polarización de fotones) y se las envía a Bob, que realiza mediciones sobre las partículas. Para cada partícula que Alice envía, el estado es elegido al

azar entre un autoestado de S_z o de S_x. Supondremos que los estados de las partículas no se modifican al viajar de un lugar al otro. Una vez recibida una partícula por Bob, éste elige al azar si medir S_z o S_x. Esta secuencia de preparación y medición se realiza muchas veces y para cada realización Alice anota qué estado preparó y Bob qué estado midió.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que los resultados de Alice y Bob coincidan? (o sea, ¿cual es la probabilidad de que en una dada realización Alice y Bob tengan anotado el mismo estado?).

(b) Suponga que una vez repetido este procedimiento muchas veces, Alice anuncia públicamente, para cada realización, si el estado enviado era autoestado de S_z o de S_x. ¿Cuál es la probabilidad de que los resultados de Alice y Bob coincidan si Bob midió el mismo observable preparado por Alice? ¿Y si midió un observable distinto? Si Alice y Bob tienen por objetivo compartir una secuencia aleatoria de bits, ¿como se aseguran de tener la misma secuencia? (consideremos bit 0 si el spin medido es $\hbar/2$, y bit 1, si es $-\hbar/2$).

(c) ¿Pueden Alice y Bob estar seguros de que esa secuencia es conocida sólo por ellos? Discuta qué sucede si hay una observadora llamada Eve (E de espía o evesdropper) que intercepta las partículas cuando van desde Alice hacia Bob. ¿Qué estrategia usa para reenviar el bit interceptado? ¿Pueden Alice y Bob descubrir la maniobra?

Interesades en el uso de estas ideas para la distribución cuántica de claves pueden leer el trabajo de C. Bennett y G. Brassard de 1984.

II. Conjunto Completos de Observables que Conmutan.

6 Considere un sistema de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. Considere los observables A, B y C dados por

$$
\begin{aligned}
A &= a\left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right) - a\,|3\rangle\langle 3| \,, \\
B &= b\left(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|\right) - b\,|2\rangle\langle 2| \,, \\
C &= c\left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right) + 2c\,|3\rangle\langle 3| \,,
\end{aligned}
$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que estos tres operadores conmutan entre sí y poseen una base común de autoestados.

(b) Suponga que se miden los observables A y B sobre el sistema y se obtienen como resultados a y b. ¿Puede decir con certeza cuál es el estado luego de la medición? En caso afirmativo escriba el estado.

(c) Suponga ahora que en cambio se miden los observables A y C sobre el sistema, obteniendo los resultados a y c. ¿Puede ahora decir con certeza cuál es el estado luego de la medición? En caso afirmativo escriba el estado.

(d) Diga qué combinaciones de los operadores A, B y C forman un conjunto completo de observables que conmutan (CCOC).

7 Considere el sistema de spin 1 del problema 1 y calcule los operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2.

(a) Diga cuáles son sus autovalores y autovectores. ¿Conmutan los operadores? Determine qué combinaciones de estos observables forman un CCOC. ¿Cuál es la base común de autovectores?

(b) Suponga que se prepara un autoestado de L_x con $m_x = 1$ y se mide L_z^2. ¿Cuáles son los resultados posibles y sus probabilidades?

(c) Repita el ítem anterior pero para los casos en que el estado inicial sobre el que se mide L_z^2 es el autoestado $m_y = 0$ o $m_z = 1$.

(d) Discuta cómo se puede hacer para medir simultáneamente los tres operadores L_x^2, L_y^2 y L_z^2. Diseñe un instrumento que mida estos operadores usando los aparatos de Stern–Gerlach que separan el haz de acuerdo a los valores de L_j (recuerde que el proceso de separación de un haz en tres, que es efectuado aplicando un campo magnético apropiado, puede ser revertido totalmente).

$\boxed{8}$ Considere un sistema de dimensión 4. Sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$ una base ortonormal del espacio tal que tres dados observables A, B y C están dados por

$$A = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = b\,|1\rangle\langle 1| + b\,|2\rangle\langle 2| - b\,|3\rangle\langle 4| - b\,|4\rangle\langle 3|\,, \; \begin{cases} C\,|1\rangle = c\,|1\rangle + ic\,|2\rangle \\ C\,|2\rangle = c\,|2\rangle - ic\,|1\rangle \\ C\,|3\rangle = c\,|4\rangle \\ C\,|4\rangle = c\,|3\rangle \end{cases},$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Determine qué combinaciones de los operadores A, B y C conmutan entre sí y en tales casos encuentre una base común de autoestados.

(b) Diga qué combinaciones de los operadores A, B y C forman un conjunto completo de observables que conmutan (CCOC). En los casos en que los operadores conmutan, pero no forman un conjunto completo, proponga un nuevo observable que junto a ellos sí forme un CCOC.

III. Principio de incertidumbre.

Dados dos observables A y B, el principio de incertidumbre generalizado de Schrödinger–Robertson establece que

$$\mathrm{Var}(A)\,\mathrm{Var}(B) \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^2 + |K(A,B)|^2\,,$$

con $\mathrm{Var}(\cdot)$ la varianza del respectivo observable,

$$K(A,B) = \frac{1}{2}\langle\{A,B\}\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle\,,$$

y donde todos los valores medios están tomados respecto de un mismo estado $|\psi\rangle$ (arbitrario, pero fijo). De aquí se puede deducir inmediatamente la versión más conocida del principio de incertidumbre generalizado de Heisenberg

$$\mathrm{Var}(A)\,\mathrm{Var}(B) \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^2 .$$

Finalmente, se puede demostrar que la desigualdad de Schrödinger–Robertson se satura (incerteza mínima) si y sólo si el estado $|\psi\rangle$ satisface

$$\Delta A\,|\psi\rangle = \lambda\Delta B\,|\psi\rangle$$

donde $\Delta A = A - \langle A\rangle\,\mathbb{I}$, análogamente para ΔB, y $\lambda \in \mathbb{C}$; mientras que la desigualdad de Heisenberg generalizada se satura si y sólo si además el λ es un imaginario puro.

$\boxed{9}$ Consideremos un sistema con spin1/2 y veamos las implicancias del principio de incertidumbre.

(a) En primer lugar, muestre que en este caso se tiene que

$$\mathrm{Var}(S_j) = \frac{\hbar^2}{4}(1 - \langle\sigma_j\rangle^2), \qquad K(S_j, S_k) = \frac{\hbar^2}{4}(\delta_{jk} - \langle\sigma_j\rangle\langle\sigma_k\rangle).$$

(b) Muestre que si el estado es tal que $\mathrm{Var}(S_j) = 0$ (¿para qué estados es esto posible?), entonces $\langle S_k\rangle = 0$ para $k \neq j$ y $K(S_j, S_k) = 0$ para todo k. Interprete las consecuencias físicas de estos resultados.

(c) Demuestre que para cualquier estado $|\psi\rangle$ de un sistema de spin1/2 existe algún λ complejo tal que se satisface la condición $(\sigma_x - \langle\sigma_x\rangle)\,|\psi\rangle = \lambda(\sigma_y - \langle\sigma_y\rangle)\,|\psi\rangle$. Encuentre λ para el estado más general.

(d) Utilizando todo lo anterior, muestre que del principio de incertidumbre generalizado se deduce que $\sum_l \langle\sigma_l\rangle^2 = 1$.

10 **Incerteza mínima y paquetes Gaussianos.** Decimos que un estado $|\psi\rangle$ es un paquete Gaussiano si su función de onda es de la forma

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}} \exp\left[\frac{ip_0 x}{\hbar}\right] \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}\right],$$

donde $x_0, p_0, \sigma_x \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que la densidad de probabilidad en x es una densidad de probabilidad normal con valor medio x_0 y desviación estándar σ_x.

(b) Verifique que la densidad de probabilidad en p, $|\langle p|\psi\rangle|^2 = |\psi(p)|^2$ es una densidad normal con valor de expectación p_0 y desviación estándar $\sigma_p = \hbar/(2\sigma_x)$.

(c) Usando lo anterior verifique que el paquete de onda Gaussiano satisface la relación de incerteza posición–momento mínima $\operatorname{Sdv}(x)\operatorname{Sdv}(p) = \hbar/2$, donde $\operatorname{Sdv}(\cdot) = \sqrt{\operatorname{Var}(\cdot)}$ es la desviación estándar.

(d) Muestre que la condición necesaria para tener incerteza mínima, $\Delta x\,|\psi\rangle = c\Delta p\,|\psi\rangle$, con $\Delta x = x - \langle x\rangle$, análogamente para Δp y c imaginario, se satisface.

(e) Finalmente, partiendo de la condición necesaria para tener un paquete de incerteza mínima $\Delta x\,|\psi\rangle = c\Delta p\,|\psi\rangle$, demuestre que todo estado $|\psi\rangle$ que satisface esta condición es necesariamente un paquete de onda Gaussiano.

Ayudas:

- La densidad de probabilidad normal es: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, con μ el valor medio de z y σ su desviación estándar.
- Sea $\mathcal{F}[f(x)](k)$ la transformada de Fourier de $f(x)$ evaluada en k, vale que

$$\mathcal{F}[f(x-a)](k) = e^{-ika}\,\mathcal{F}[f(x)](k),$$
$$\mathcal{F}\left[f(x)e^{iax}\right](k) = \mathcal{F}[f(x)](k-a),$$
$$\mathcal{F}\left[e^{-\alpha x^2}\right](k) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp\left[-\frac{k^2}{4\alpha}\right].$$

IV. Sistemas compuestos.

11 (a) Sean $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, y $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Diga entonces a qué espacio pertenece $v \otimes w$ y escriba su expresión en la base canónica.

(b) Sea $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}_1$ de dimensión 2 y sea $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$ la de un espacio $\mathscr{H}_2$ de dimensión 3. Considere además los estados

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|\phi_1\rangle + \beta\,|\phi_2\rangle \qquad \text{y} \qquad |\Phi\rangle = a\,|\varphi_1\rangle + b\,|\varphi_2\rangle + c\,|\varphi_3\rangle\,.$$

Escriba entonces $|\Psi\rangle \otimes |\Phi\rangle \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Encuentre además la expresión matricial de este estado en la base producto $\{|\phi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle\}$.

(c) Sean una partícula de spin ½ y otra de spin 1, cuyos espacios de Hilbert respectivos son $\mathscr{H}_{1/2}$ y $\mathscr{H}_1$. Los operadores de spin en la dirección x se escriben, en las respectivas bases de autoestados de spin en la dirección z, como

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(para spin ½)}, \qquad \text{y} \qquad L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(para spin 1)}.$$

Escriba la representación matricial del operador $S_x \otimes L_x$ en la base producto de autoestados de spin en la dirección z.

12 **Base producto y base de Bell.** Considere un sistema compuesto de dos partes, que denotamos A y B, cada una de las cuales tiene un espacio de estados de dimensión 2. Sea $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ una base ortonormal de estados de A y $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ análogamente para B. Asimismo, sean σ_i^A y σ_i^B $(i = x, y, z)$ observables sobre cada uno de los subsistemas, cuyas representaciones matriciales en estas bases están dadas por las matrices de Pauli, de forma tal que $|0\rangle_A$ y $|1\rangle_A$ son autoestados de σ_z^A con autovalor $+1$ y -1, respectivamente (y análogamente para B).

(a) Considere el conjuntos de observables sobre el sistema compuesto: $\{\sigma_z^A \otimes \mathbb{I}^B, \mathbb{I}^A \otimes \sigma_z^B\}$. Muestre que forman conjunto completo de observables que conmutan y encuentre una base común de autoestados. ¿Qué propiedad satisfacen los elementos de esta base?

(b) Considere el conjuntos de observables sobre el sistema compuesto: $\{\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B, \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B\}$. Muestre que forman conjunto completo de observables que conmutan y encuentre una base común de autoestados. ¿Qué propiedad satisfacen los elementos de esta base?

(c) Considere los operadores $\sigma_x^A \otimes \sigma_z^B$ y $\sigma_z^A \otimes \sigma_x^B$. Diga si forman un CCOC y en ese caso encuentre la base comun de autoestados.

13 **Base de Bell.** Considere los siguientes estados de un sistema compuesto por dos subsistemas de dimensión 2 (donde $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ son los autoestados de σ_z con autovalor ± 1, respectivamente):

$$\left|\Phi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right), \qquad \left|\Psi^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle \pm |10\rangle\right),$$

que conforman la comúnmente denominada *base de Bell*.

(a) Calcule las probabilidades de los posibles resultados de la medición de un observable cualquiera sobre el primer subsistema. Análogamente calcule las probabilidades para mediciones arbitrarias sobre el segundo subsistema.

(b) Calcule el valor medio de los operadores de la forma $\sigma_j \otimes \sigma_k$ para $j, k = x, y, z$ en cada uno de los estados de Bell.

14 Suponga que se prepara a un sistema de dos spins en el estado de Bell $|\Psi^-\rangle$ (también llamado estado singlete) y que ambas partículas son llevadas a laboratorios distantes (llamados A y B) de modo tal que el estado del conjunto A, B no se modifica durante el viaje. Suponga que en el laboratorio A se mide el observable $\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ y en el laboratorio B se mide $\sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \hat{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

(a) Calcule las probablidades $\text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \pm 1)$, $\text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \pm 1)$ (probablidades para cada subsistema); $\text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \pm 1, \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \pm 1)$; $\text{Prob}(\sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \mp 1, \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} = \pm 1)$ (probablidades conjuntas).

(b) Calcula la función de correlación entre los resultados obtenidos en A y B, definida como

$$K(A, B) =: \left\langle \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} \otimes \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} \right\rangle - \left\langle \sigma_{\hat{\boldsymbol{a}}} \right\rangle \left\langle \sigma_{\hat{\boldsymbol{b}}} \right\rangle.$$

(c) Repita el cálculo de la función de correlación para los otros estados de Bell. ¿Cuáles son las diferencias y cuáles las similitudes entre ambos resultados?. Interprete.

15 La siguiente (pseudo) paradoja fue propuesta por N. David Mermin (*Am. J.Phys.* **58**, *731 (1990)*). Considere un sistema de 3 partículas de espín 1/2 (A, B y C) que se preparan en el estado $|\Psi\rangle = (|000\rangle - |111\rangle)/\sqrt{2}$. Cada partícula es llevada a un laboratorio distante de modo tal que el estado del conjunto no se modifica durante el viaje.

(a) Muestre que $|\Psi\rangle$ es un autoestado de los siguientes operadores: $O_1 = \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y$, $O_2 = \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y$, $O_3 = \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x$ y $O_4 = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x$. Diga cuales son los autovalores correspondientes.

(b) Suponga que en cada laboratorio se mide σ_x obteniéndose los valores $m_x^{(A)}$, $m_x^{(B)}$ y $m_x^{(C)}$. ¿Cuanto vale el producto de estos tres valores medidos?

(c) Suponga en cambio que en cada laboratorio se toma la decisión (de manera independiente y aleatoria) de medir σ_x o σ_y. Considere un experimento en el cual dos observadores miden σ_y y uno mide σ_x. ¿Cuanto vale el producto de los tres resultados?

(d) Nuestro sentido común nos indica que el resultado de la medición de σ_x en A no puede depender de cual haya sido el observable que midieron B y C. Discuta este argumento.

(e) Si se convenció de la validez de la afirmación anterior note que puede razonar del mismo modo para B y C (o sea, los valores medidos en B no pueden depender de lo que decidan medir A y C, etc).

(f) En consecuencia, si los valores medidos de σ_j en cada laboratorio los denominamos $m_j^{(A,B,C)} = \pm 1$ debemos concluir que $m_x^{(A)} m_y^{(B)} m_y^{(C)} = +1$, $m_y^{(A)} m_x^{(B)} m_y^{(C)} = +1$ y $m_y^{(A)} m_y^{(B)} m_x^{(C)} = +1$. ¿Es esto compatible con la igualdad $m_x^{(A)} m_x^{(B)} m_x^{(C)} = -1$?

(g) Discuta si lo anterior es muestra una inconsistencia de la mecánica cuántica o símplemente ilustra su contradicción con nuestro sentido común (recuerde la consigna: *los experimentos que no se realizan no tienen resultados* y encuentre el argumento *contrafáctico* en la formulación de la paradoja).