Resolución de los ejercicios 12, 13 y 14 de la guía 3. Les recomiendo seguir el capítulo 5.7 del libro de la materia. Las cuentas deberían ser casi mínimas, pero resuélvanlo por su cuenta y a consciencia! Si algún resultado no les coincide, o no entienden lo planteado aquí, obviamente pueden consultarlo.

Guía 3 - Ejercicio 12

Base Producto y base de Bell: Antes que nada deberían mostrar que los observables del conjunto de cada inciso conmutan entre sí (de lo contrario sería imposible hallar una base común de autoestados). Luego tienen que proponer una base y verificar que los elementos de la base efectivamente: (i) son autoestados del conjunto de observables y (ii) cada elemento de la base tiene un conjunto de autovalores único. La base que pueden proponer para cada inciso (les queda a ustedes verificar (i) y (ii)) es:

a) $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$

b) $\left\{\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}\right\}$ (es la base de Bell que propone el ejercicio siguiente).

c) **Pista**: Si no se les ocurre la base, empiecen por algo más fácil: primero diagonalizar solamente $\sigma_x \otimes \sigma_z$

$$\left\{\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|01\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|00\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right\}$$

con autovalores $+1, +1, -1, -1$ respectivamente. Ahora, estos no son autoestados de $\sigma_z \otimes \sigma_x$, pero podemos combinar linealmente entre sí los que tienen $+1$ por un lado, y los que tienen -1 por otro lado. Sumando o restando los primeros dos, construimos

$$\left\{\frac{|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle - |11\rangle}{2}\ ,\ \frac{|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle + |11\rangle}{2},\ v_3\ ,\ v_4\right\}$$

Pueden verificar que esos son autoestados comunes de $\sigma_x \otimes \sigma_z$ y $\sigma_z \otimes \sigma_x$. Les queda averiguar los v_3 y v_4 restantes :).

Guía 3 - Ejercicios 13 y 14

Siguiendo la notación del capítulo 5.7 del libro de la materia

$$\{|\beta_{+1,+1}\rangle, |\beta_{-1,+1}\rangle, |\beta_{+1,-1}\rangle, |\beta_{-1,-1}\rangle\} \quad \leftrightarrow \quad \{|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle\}$$

y a partir de las eqs. (5.19) y (5.20), automáticamente pueden utilizar las propiedades de ortogonalidad para escribir, para $i \neq j$

$$\langle\beta_{m_1,m_2}|\sigma_i \otimes \mathbb{I}|\beta_{m_1,m_2}\rangle = \langle\beta_{m_1,m_2}|\mathbb{I} \otimes \sigma_j|\beta_{m_1,m_2}\rangle = \langle\beta_{m_1,m_2}|\sigma_i \otimes \sigma_j|\beta_{m_1,m_2}\rangle = 0\,.$$

En cambio, $\langle\beta_{m_1,m_2}|\sigma_i\otimes\sigma_i|\beta_{m_1,m_2}\rangle$ está dado por los autovalores de cada $|\beta_{m_1,m_2}\rangle$:

$$\begin{aligned}\sigma_x\otimes\sigma_x|\beta_{m_1,m_2}\rangle &= m_1|\beta_{m_1,m_2}\rangle\\ \sigma_y\otimes\sigma_y|\beta_{m_1,m_2}\rangle &= -m_1m_2|\beta_{m_1,m_2}\rangle\\ \sigma_z\otimes\sigma_z|\beta_{m_1,m_2}\rangle &= m_2|\beta_{m_1,m_2}\rangle\end{aligned}$$

Por último, del ejercicio 4 de la guía 1, el proyector sobre los autoestados de σ_i es

$$\Pi_{\pm\hat{n}} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I}\pm n_i\sigma_i\right)$$

Con esto pueden escribir el proyector sobre cualquier estado con $\sigma_{\hat{a}}=\pm1$, $\sigma_{\hat{b}}=\pm1$ o ambas en conjunto $(\sigma_{\hat{a}},\sigma_{\hat{b}})=(\pm1,\pm1)$. Todos los valores de expectación sobre los $|\beta_{m_1,m_2}\rangle$ quedaron escritos de forma explícita y sencilla, y si escriben las probabilidades como un valor de expectación sobre los proyectores, deberían poder reducir la cuenta a un valor de expectación sobre los $|\beta_{m_1,m_2}\rangle$.

13 a) El observable más general posible sobre el primer sistema es $\hat{\mathcal{O}}_A=(n_0\mathbb{I}+n_i\sigma_i)_A\otimes\mathbb{I}_B$. Escribiendo la probabilidad como valor medio del proyector correspondiente, deberían obtener

$$\langle\beta_{m_1,m_2}|\Pi|\beta_{m_1,m_2}\rangle = \frac{1}{2}\langle\beta_{m_1,m_2}|\left(\mathbb{I}\pm n_i\sigma_i\right)\otimes\mathbb{I}|\beta_{m_1,m_2}\rangle=\frac{1}{2}\,.$$

Lo mismo sucede para el segundo sistema.

Esto tiene sentido: Los estados de Bell son máximamente entrelazados, por lo tanto sabemos *todo* del sistema compuesto (su estado es $|\beta_{m_1,m_2}\rangle$, el resultado de medir $\sigma_x\otimes\sigma_x$ y $\sigma_z\otimes\sigma_z$ es el 100% de las veces m_1, m_2) y al mismo tiempo no sabemos *nada* de cada una de las partes (su estado es $\rho=\frac{1}{2}\mathbb{I}$, el resultado de medir cualquier cosa es el 50% de las veces una cosa y el 50% otra). Ahora, con las propiedades de más arriba, pueden mostrar con una cuenta súper rápida que la probabilidad es siempre 1/2 para ambos sistemas.

b) Ya lo dijimos más arriba. Es 0 o $m_1,-m_1m_2,m_2$.

14 a) Igual que antes: escriban la probabilidad como valor medio del proyector correspondiente. Para mediciones sobre sólo un sistema, ya dijimos que la probabilidad debería ser 1/2 siempre. Para una medición sobre ambos al mismo tiempo, deberían llegar a

$$\mathrm{Prob}(\sigma_{\hat{a}}=1,\sigma_{\hat{b}}=1) = \frac{1}{4}\left(1+\sum_{ij}^{3}a_ib_j\langle\Psi^-|\sigma_i\otimes\sigma_j|\Psi^-\rangle\right)$$

(recuerden que $|\Psi^-\rangle=|\beta_{-1,-1}\rangle$). Prueben llegar a la expresión análoga para los cuatro casos posibles $(\sigma_{\hat{a}},\sigma_{\hat{b}})=(\pm1,\pm1)$. Comparen con la ecuación (5.26) del libro.

b) Se resuelve muy parecido al anterior. Deberían llegar a la ecuación (5.24) del libro.