## I. Mezclas estadísticas de estados.

1 Para los siguientes sistemas de spin ½, escriba el operador densidad $\rho$ y su representación matricial en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de autoestados de $S_z$.

(a) Un haz completamente polarizado con $S_z+$ (es decir en el autoestado $+\hbar/2$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$).

(b) Un haz completamente polarizado con $S_x+$ (es decir en el autoestado $+\hbar/2$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$).

(c) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla estadística incoherente con 75 % de $S_z+$ y 25 % de $S_z-$.

(d) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla estadística incoherente con 75 % de $S_z+$ y 25 % de $S_x+$.

(e) Un haz no polarizado, formado por una mezcla estadística incoherente de $S_x+$ y $S_x-$ en igual cantidad (50 %).

Para cada uno de estos casos calcule los valores medios $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ y $\langle S_z\rangle$.

2 Escriba la matriz densidad correspondiente a los estados que recibe Bob en el protocolo BB84 de distribución cuántica de claves.

3 Se fabrican dos haces parcialmente polarizados de partículas de spin 1, según las siguientes proporciones:

(a) 50 % del autoestado $+\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$, 50 % del autoestado $-\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$.

(b) 50 % del autoestado $+\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$, 50 % del autoestado $-\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$.

Muestre que ambos dan el mismo $\langle \boldsymbol{S}\rangle$, pero que las matrices densidad son distintas. Discuta cómo podría distinguirlos en un experimento.

4 (a) Considere un ensamble de sistemas de spin ½ que se prepara generando una mezcla estadística con 75 % de autoestados $+\hbar/2$ de $S_z$ y 25 % de autoestados de $-\hbar/2$ de $S_z$. Escriba la matriz densidad correspondiente en la base de autoestados de $S_z$.

(b) Considere ahora un ensamble que se prepara con 50 % de estados $|a\rangle$ y 50 % de estados $|b\rangle$, donde $|a\rangle, |b\rangle$ están dados por

$$|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+\rangle + \frac{1}{2}|-\rangle, \qquad |b\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+\rangle - \frac{1}{2}|-\rangle, \tag{1}$$

donde $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ son los autoestados de $S_z$. ¿Qué estados físicos representan $|a\rangle$ y $|b\rangle$? Escriba la matriz densidad correspondiente en este caso.

(c) Compare las matrices densidad obtenidas en los dos ítems anteriores. ¿Es posible dar una interpretación no ambigua de un estado mixto $\rho$ como preparación de una mezcla estadística de estados puros?

5 Considere dos conjuntos estadísticos de sistemas de spin ½, $A$ y $B$. El primero se encuentra en un estado puro $|\psi_A\rangle = |+, \hat{\boldsymbol{z}}\rangle$, y el segundo en el estado puro $|\psi_B\rangle = |+, \hat{\boldsymbol{x}}\rangle$. Se realiza una medición de $S_x$ sobre el sistema $A$ y otra de $S_z$ sobre el sistema $B$, pero en ninguno de los dos casos se observa el resultado.

(a) Escriba explícitamente $\rho_A$ y $\rho_B$ luego de las mediciones, y verifique que describen estados mezcla.

(b) ¿Cómo se relacionan $\rho_A$ y $\rho_B$? ¿Podría decir que existe una interpretación no ambigua de un operador densidad como preparación de una mezcla estadística?

6 **Pureza.** Sea $\rho$ la matriz densidad que representa el estado de un sistema cuántico. Se llama *pureza* del estado $\rho$ a la cantidad $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right)$.

(a) Mostrar que $\frac{1}{D} \le \mathrm{tr}\left(\rho^2\right) \le 1$, donde $D$ es la dimensión del espacio de Hilbert.

(b) Muestre que si el estado es puro, entonces $\rho^2 = \rho$ y por lo tanto la pureza es máxima, $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) = 1$. Muestre que vale también la vuelta, es decir que si la pureza es máxima, $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) = 1$, entonces necesariamente $\rho$ es un estado puro.

(c) Mostrar que para un estado mixto, $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) < 1$.

(d) Se llama *estado máximamente mixto* al estado $\rho = \frac{1}{D}\mathbb{I}$. Verifique que esta definición satisface todas las condiciones necesarias para ser un estado cuántico. Muestre que el estado máximamente mixto tiene pureza mínima, $\mathrm{tr}\left(\rho^2\right) = 1/D$.

$\boxed{7}$ Considere un sistema de spin ½. Para cada uno de los siguientes estados calcule la pureza, y los valores medios del spin en las tres direcciones cartesianas. Para el caso en que el estado es puro, encuentre el estado $|\psi\rangle$ tal que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

(a) $\rho = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)$,

(b) $\rho = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)$,

(c) $\rho = \frac{9}{10}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{3}{10}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \frac{3}{10}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{10}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$,

(d) $\rho = \frac{1}{3}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{2}{3}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$,

(e) $\rho = \frac{8}{10}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{3}{10}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \frac{3}{10}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{2}{10}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$,

donde $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ son los autoestados de $\sigma_z$ con autovalor $\pm 1$ respectivamente.

$\boxed{8}$ **Bola de Bloch.** Considere un sistema de spin ½.

(a) Muestre que la matriz densidad se puede siempre escribir en la forma

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right),$$

donde $\mathbb{I}$ es el operador identidad, y $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^3$. (Sugerencia: use los resultados ya mostrados en las guías anteriores; en particular use que el operador hermítico más general posible en dimensión 2 es de la forma $A = a_0\mathbb{I} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, con $a_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$).

(b) Calcule la pureza de $\rho$ y encuentre cómo se relaciona con $\boldsymbol{P}$. En particular, ¿qué satisface $\boldsymbol{P}$ si el estado es puro? ¿y si es mixto? Relacione esto con la representación en la esfera de Bloch para estados de spin ½. (Ayuda: recordar las propiedades que satisfacen las matrices de Pauli)

(c) Calcule $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$. ¿Cuál es la interpretación física de $\boldsymbol{P}$?

(d) Suponga que se sabe que se tiene un ensamble de spin ½ en un estado puro y suponga que se mide $\langle S_z\rangle$ y $\langle S_x\rangle$. ¿Puede terminar unívocamente el estado del sistema? ¿Cuánto vale $\langle S_y\rangle$? Si ahora en cambio el sistema puede estar en un estado mixto, ¿basta con conocer $\langle S_z\rangle$ y $\langle S_x\rangle$ para determinar el estado del sistema?

## II. Estados reducidos: subsistemas de sistemas compuestos.

$\boxed{9}$ Considere un sistema compuesto por dos partículas distinguibles de spin ½ y sean $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ los autoestados de $S_z$ $\pm\hbar/2$, respectivamente. Para cada uno de los siguientes cuatro estados,

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle\right), \qquad |\Psi_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle\right),$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle\right), \qquad |\Psi_4\rangle = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle\right),$$

$$|\Psi_5\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\downarrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle.$$

(a) Determine si el estado del sistema compuesto es puro o mixto.

(b) Calcule la matriz densidad reducida para cada partícula. ¿Es el estado de cada subsistema puro o mixto?

(c) Determine si el estado del sistema compuesto es entrelazado.

(d) Proponga un observable (no totalmente degenerado) del sistema compuesto tal que su medición sobre el estado dado tenga un único resultado posible con certeza. ¿Puede hacer lo mismo para el estado de la partícula 1 considerando mediciones sólo sobre ese subsistema?

10 Considere el *estado de Werner* de dos sistemas de dimensión dos, cuya matriz densidad es

$$\rho_{12} = p\left|\Psi^-\middle\rangle\!\middle\langle\Psi^-\right| + \frac{1-p}{4}\,\mathbb{I}_{12},$$

con $0 \leq p \leq 1$, $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$, y $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ los autoestados de $\sigma_z$ con autovalor $\pm 1$.

(a) Calcule la pureza del estado en función de $p$ y grafíquela. Interprete. ¿En qué casos es el estado puro? ¿Qué estado se tiene para $p = 0$?

(b) Calcule las matrices densidad reducidas $\rho_A$ y $\rho_B$. ¿Dependen éstas de $p$? Para el caso en que el estado global es puro,¿es el estado entrelazado o no? (justifique).

(c) Calcule el valor de expectación de la función de correlación $K(y,y) := \langle\sigma_y \otimes \sigma_y\rangle_{12} - \langle\sigma_y\rangle_1 \langle\sigma_y\rangle_2$, donde $\langle\cdot\rangle_i$ es el valor medio del respectivo observable en el subsistema $i$. Interprete.

11 Considere un sistema compuesto por tres partículas distinguibles con spin ½ y suponga que el estado del sistema está dado por la matriz densidad

$$\rho_{123} = \frac{1}{3}\,|{\uparrow\uparrow\downarrow}\rangle\langle{\uparrow\uparrow\downarrow}| + \frac{1}{3}\,|{\uparrow\downarrow\uparrow}\rangle\langle{\uparrow\downarrow\uparrow}| + \frac{1}{3}\,|{\downarrow\uparrow\uparrow}\rangle\langle{\downarrow\uparrow\uparrow}| + \frac{i}{3}\,|{\uparrow\uparrow\downarrow}\rangle\langle{\uparrow\downarrow\uparrow}| - \frac{i}{3}\,|{\uparrow\downarrow\uparrow}\rangle\langle{\uparrow\uparrow\downarrow}|\,,$$

con $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ los autoestados de $S_z$ con autovalor $\pm 1$.

(a) Calcule la matriz densidad reducida para la primer partícula. Usando esa expresión, calcule $\langle S_z\rangle_1$. Muestre que obtiene el mismo resultado calculando $\langle S_z \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}\rangle_{123}$.

(b) Calcule el valor de expectación de la función de correlación

$$K(z,x,y) := \langle S_z \otimes S_x \otimes S_y\rangle_{123} - \langle S_z\rangle_1 \langle S_x\rangle_2 \langle S_y\rangle_3\,.$$

12 El resultado de la aniquilación de un electrón y un positrón que produce un par de fotones $A$ y $B$, puede ser descripto mediante una matriz densidad de $4 \times 4$ dada por

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4}\left(\mathbb{I}_A \otimes \mathbb{I}_B - \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B\right),$$

donde $\mathbb{I}_X$ son las identidades, $\boldsymbol{\sigma}_X$ las matrices de Pauli de los respectivos sistemas $X = A, B$; y $\boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B = \sum_{i=1,2,3} \sigma_{iA} \otimes \sigma_{iB}$.

(a) Calcule la pureza del estado. ¿Es el estado mixto o puro?

(b) Calcule la matriz densidad reducida de $A$, $\rho_A = \mathrm{tr}_B(\rho_{AB})$. ¿Puede asegurar si el estado $\rho_{AB}$ es entrelazado o no? Evalúe la polarización del fotón $A$ tomando

$$\boldsymbol{P}_A = \mathrm{tr}\left(\rho_A \boldsymbol{\sigma}_A\right).$$

Interprete el resultado. Repita el cálculo para la polarización del fotón $B$.

(c) Suponga ahora que se tienen dos detectores, configurados para medir las polarizaciones $\boldsymbol{P}_A^{\mathrm{det}}$ y $\boldsymbol{P}_B^{\mathrm{det}}$, respectivamente, de forma tal que las mediciones están representadas por los proyectores

$$\Pi_X^{\mathrm{det}} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I}_X + \boldsymbol{P}_X^{\mathrm{det}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_X\right), \qquad X = A, B.$$

Calcule el valor de expectación de las correlaciones entre detecciones en ambos detectores, es decir

$$\mathrm{tr}\left[\rho_{AB}(\Pi_A^{\mathrm{det}} \otimes \Pi_B^{\mathrm{det}})\right].$$

Interprete el resultado. ¿Qué ocurre si $\boldsymbol{P}_A^{\mathrm{det}}$ y $\boldsymbol{P}_B^{\mathrm{det}}$ son paralelos? ¿Y cuando son antiparalelos? ¿Qué conclusión puede sacar sobre la correlación entre las polarizaciones de los fotones $A$ y $B$?