Primer parcial

$\boxed{1}$ Considere un sistema cuántico descripto por la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$ y los observables

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad A = a\left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| - i\,|4\rangle\langle 3| + i\,|3\rangle\langle 4|\right), \quad \begin{cases} B\,|1\rangle &= b\,|1\rangle \\ B\,|2\rangle &= -b\,|2\rangle \\ B\,|3\rangle &= b\,|3\rangle \\ B\,|4\rangle &= -b\,|4\rangle \end{cases}$$

donde ω, a y b son constantes reales.

(a) ¿Puede formar un conjunto completo de observables que conmutan (ccoc) a partir de estos observables? En caso contrario proponga un observable que complete el ccoc y encuentre la base que los diagonaliza simultáneamente y sus autovalores.

(b) Suponga que el estado inicial es $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |3\rangle)$. Calcule $\langle B\rangle$. Si se midiera el Hamiltoniano H, ¿con qué probabilidad se obtiene $\hbar\omega$ y cuál es el estado luego de medir? ¿Corresponde unívocamente a un elemento de la base de un ccoc? En caso contrario ¿qué mediciones puede realizar para determinarlo?

(c) Ahora suponga que en lugar de medir se deja evolucionar el sistema. Obtenga la probabilidad de obtener b al medir el observable B a tiempo t y $\langle B\rangle(t)$. ¿Existe un valor de t para el cual $\langle B\rangle(t) = 0$?

$\boxed{2}$ Considere una partícula con un grado de libertad interno de dos niveles (spin-1/2), y un grado de libertad de traslación unidimensional. Su Hamiltoniano es:

$$H = \alpha\, \sigma_z \otimes \hat{p},$$

donde σ_k es el operador de Pauli en la dirección k, y $\hat{p}$ es el operador momento. En lo que sigue $|\pm\rangle_k$ es el autoestado de σ_k con autovalor ± 1 y $|x\rangle$ un autoestado del operador posición $\hat{x}$ con autovalor x.

(a) Obtenga la evolución temporal de los vectores $|+\rangle_z \otimes |x\rangle$ y $|-\rangle_z \otimes |x\rangle$. Explique cuál es la acción de la evolución temporal sobre el grado de libertad de traslación.

(b) Si el estado inicial es $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle_x \otimes |\phi\rangle$, donde $|\phi\rangle$ es un paquete Gaussiano con función de onda $\langle x|\phi\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\{-x^2/(4\sigma^2)\}$, calcule el estado $|\Psi(t)\rangle$ a tiempo t. Calcule el estado reducido para el grado de libertad de traslación. ¿Se trata de un estado puro o mixto? Calcule la pureza de este estado como función del tiempo.

(c) A cierto tiempo t se miden la posición obteniendo el valor x_0. ¿Cuál es el estado global luego de la medición?

(d) Inmediatamente después de la medición del ítem anterior, se mide el operador $S_z = (\hbar/2)\sigma_z$. Calcule las probabilidades $P(\pm|x_0)$ de obtener los resultados $\pm\hbar/2$. Calcule el ratio de probabilidades $\frac{P(+|x_0)}{P(-|x_0)}$ e interprete el caso $x_0 = 0$ y los límites $x_0 \to \pm\infty$ y $t \to \infty$.

Ayuda: de ser necesario, tenga en cuenta que $\langle\phi|\, e^{-i\hat{p}d/\hbar}\,|\phi\rangle = e^{-\frac{d^2}{8\sigma^2}}$

Primer parcial

$\boxed{3}$ Considere dos partículas sobre un espacio unidimensional acopladas mediante el Hamiltoniano

$$H = \hbar\omega(\hat{x}_1\hat{p}_2 + \hat{p}_1\hat{x}_2),$$

donde $\hat{x}_k$ y $\hat{p}_k$ son los operadores de posición y momento adimensionales de la partícula k ($[\hat{x}_k, \hat{p}_k] = i$).

(a) Reescriba el Hamiltoniano en términos de los operadores $a = (\hat{x}_1 + i\hat{p}_1)/\sqrt{2}$, $b = (\hat{x}_2 + i\hat{p}_2)/\sqrt{2}$ y sus adjuntos. Muestre que la evolución de los operadores a y b en la representación de Heisenberg es

$$a(t) = \cosh(\omega t)a + \sinh(\omega t)b^\dagger \quad \text{y} \quad b(t) = \cosh(\omega t)b + \sinh(\omega t)a^\dagger.$$

(b) Dados los operadores número $N_1(t) = a^\dagger(t)a(t)$ y $N_2(t) = b^\dagger(t)b(t)$, muestre que la cantidad $N_1(t) - N_2(t)$ se mantiene constante en el tiempo.

(c) Obtenga los operadores de posición y momento de cada partícula a tiempo t. Analice la evolución de los operadores $\hat{x}_1(x) \pm \hat{x}_2(t)$ y muestre que para tiempos suficientemente largos vale $\langle\hat{x}_1(t)\rangle \simeq \langle\hat{x}_2(t)\rangle$. Análogamente, muestre que $\langle\hat{p}_1(t)\rangle \simeq -\langle\hat{p}_2(t)\rangle$ en las mismas condiciones. Calcule $\langle\hat{x}_1(t)\rangle$ y $\langle\hat{p}_1(t)\rangle$ en términos de los valores medios iniciales.

Ayuda: recuerde que $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ y $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

Soluciones:

1. (a) Basta con notar que los operadores son

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}, \ A = a \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\sigma_y \end{pmatrix}, \ B = b \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Claramente H y A conmutan entre sí pero estos no con B. La base que diagonaliza A y H es $\left\{ |\psi_\pm\rangle = \frac{|1\rangle \pm |2\rangle}{\sqrt{2}}, |\phi_\pm\rangle = \frac{|3\rangle \pm i|4\rangle}{\sqrt{2}} \right\}$ En esta base H y A son

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las mediciones $H = -\hbar\omega$ y $A = a$ no determinan unívocamente el estado. Hay que proponer un observable que rompa esta degeneración.

(b) Claramente el estado inicial $|\psi_0\rangle$ es autoestado de B. Por lo tanto $\langle B \rangle = b$. Para estudiar el resultado $\hbar\omega$ al medir H, hay que proyectar el estado inicial según el proyector $\Pi_+ = |\psi_+\rangle \langle\psi_+| + |\phi_+\rangle \langle\phi_+|$. La probabilidad de obtener ese resultado es $p_+ = \langle\psi_0| \Pi_+ |\psi_0\rangle = 1/2$. El estado luego de la medición es $\Pi_+ |\psi_0\rangle / \sqrt{p_+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle + |\phi_+\rangle)$. Entonces, no queda definido como un único estado de la base del item anterior. Pero si medimos A podemos obtener a o $-a$, quedando entonces bien definido.

(c) La cuenta sale fácil recordando que $e^{-isA} = \cos s\mathbb{I} - i\mathrm{sen} sA$ para todo operador tal que $A^2 = \mathbb{I}$. Entonces

$$|\psi(t)\rangle = \cos\omega t \frac{|1\rangle + |3\rangle}{\sqrt{2}} + \mathrm{sen}\omega t \frac{|4\rangle - i\,|2\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Luego $P(B = b)(t) = \cos^2 \omega t$ y $\langle B\rangle(t) = b\cos 2\omega t$. $\langle B\rangle(t) = 0$ para $t = \frac{\pi}{4\omega}$

2. (a) Tenemos el operador evolución $U = \sum_n \frac{(-i\alpha t)^n}{n!} \sigma_z^n \otimes \hat{p}^n$. Su aplicación para cada estado es

$$U |\pm\rangle \otimes |x\rangle = \sum_n \frac{(-i\alpha t)^n}{n!} (\pm 1)^n |\pm\rangle \otimes \hat{p}^n |x\rangle = |\pm\rangle \otimes T(\pm\alpha t) |x\rangle,$$

donde $T(d)$ es el operador de traslación. Entonces $U |\pm\rangle \otimes |x\rangle = |\pm\rangle \otimes |x \pm \alpha t\rangle$. La partícula se desplaza a la izquierda o a la derecha según su polarización en σ_z.

(b) Por el ítem anterior, $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \otimes T(\alpha t) |\phi\rangle + |-\rangle \otimes T(-\alpha t) |\phi\rangle)$. Si usamos la notación $|x_0, \sigma\rangle$ para un paquete Gaussiano centrado en x_0 y con ancho σ, entonces

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \otimes |\alpha t, \sigma\rangle + |-\rangle \otimes |-\alpha t, \sigma\rangle).$$

El estado reducido al subsistema de posición es

$$\rho = \frac{1}{2} (|\alpha t, \sigma\rangle\langle\alpha t, \sigma| + |-\alpha t, \sigma\rangle\langle-\alpha t, \sigma|).$$

Para calcular la pureza debemos calcular ρ^2,

$$\rho^2 = \frac{1}{2} (|\alpha t, \sigma\rangle\langle\alpha t, \sigma| + \langle\alpha t, \sigma|-\alpha t, \sigma\rangle\, |\alpha t, \sigma\rangle\langle-\alpha t, \sigma| \\ + \langle-\alpha t, \sigma|\alpha t, \sigma\rangle\, |-\alpha t, \sigma\rangle\langle\alpha t, \sigma| + |-\alpha t, \sigma\rangle\langle-\alpha t, \sigma|).$$

Para calcular la pureza resulta útil recordar que $\mathrm{Tr}\left[|\psi\rangle\langle\phi|\right] = \langle\phi|\psi\rangle$. Entonces

$$\mathrm{Tr}[\rho^2] = \frac{1}{2}\left(1 + |\langle\alpha t, \sigma|{-\alpha t}, \sigma\rangle|^2\right).$$

Solo resta notar que $\langle x_1, \sigma|x_2, \sigma\rangle = \langle\phi|\, e^{-i\hat{p}(x_2-x_1)/\hbar}\,|\phi\rangle$ y usar la ayuda que daba el ejercicio (o simplemente hacer una integral Gaussiana). Claramente, para $t > 0$, el estado reducido es mixto y por lo tanto el estado global está entrelazado.

(c) El proyector asociado a la medición que nos interesa es $\Pi = \mathbb{I} \otimes |x_0\rangle\langle x_0|$. Entonces, luego de medir el estado colapsa a

$$|\psi, x_0\rangle = \frac{\mathbb{I}\otimes|x_0\rangle\langle x_0|}{\sqrt{\langle\psi(t)|\,\mathbb{I}\otimes|x_0\rangle\langle x_0|\,|\psi(t)\rangle}}\,|\psi(t)\rangle = \frac{\langle x_0|\alpha t, \sigma\rangle\,|+\rangle + \langle x_0|{-\alpha t}, \sigma\rangle\,|-\rangle}{\sqrt{|\langle x_0|\alpha t, \sigma\rangle|^2 + |\langle x_0|{-\alpha t}, \sigma\rangle|^2}} \otimes |x_0\rangle\,.$$

(d) Dado el estado del item anterior, las probabilidades de los distintos resultados al medir el spin son

$$P(\pm|x_0) \propto |\langle x_0|\pm\alpha t, \sigma\rangle|^2 = |\langle x_0 \mp \alpha t|\phi\rangle|^2 \propto e^{-(x_0\mp\alpha t)^2/(2\sigma^2)}.$$

Por lo tanto, su ratio es $P(+|x_0)/P(-|x_0) = e^{x_0\alpha t/\sigma^2}$.

3. (a) En primer lugar, $\dot{a} = \frac{1}{i\hbar}[a, H] = \omega b^\dagger$ y $\dot{b^\dagger} = \omega a$. Entonces, la ecuación de movimiento para a es $\ddot{a} = \omega^2 a$. La solución es una combinación lineal de $e^{\omega t}$ y $e^{-\omega t}$, o análogamente de $\cosh\omega t$ y $\sinh\omega t$. Usando las condiciones iniciales $a(0) = a$ y $\dot{a}(0) = \omega b^\dagger$ llegamos al resultado. El procedimiento es el mismo para $b(t)$.

(b) A partir de los resultados previos, los operadores de número son

$$N_1(t) = \cosh^2\omega t a^\dagger a + \sinh^2\omega t b^\dagger b + \sinh\omega t\cosh\omega t(ab + a^\dagger b^\dagger) + \sinh^2\omega t\mathbb{I},$$
$$N_2(t) = \cosh^2\omega t b^\dagger b + \sinh^2\omega t a^\dagger a + \sinh\omega t\cosh\omega t(ab + a^\dagger b^\dagger) + \sinh^2\omega t\mathbb{I}.$$

Entonces usando que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ tenemos que $N_1(t) - N_2(t) = N_1(0) - N_2(0)$. Otra opción era calcular la evolución de Heisenberg del operador $N_1 - N_2$, de donde surge que $\frac{d}{dt}\left(N_1 - N_2\right)(t) = 0$.

(c) Debemos calcular $x(t) = \frac{a(t)+a^\dagger(t)}{2}$ y $p(t) = \frac{a(t)-a^\dagger(t)}{2i}$ para ambos osciladores. Esto da

$$x_1(t) = \cosh\omega t x_1 + \sinh\omega t x_2,\; p_1(t) = \cosh\omega t p_1 + \sinh\omega t p_2$$
$$x_2(t) = \cosh\omega t x_2 + \sinh\omega t x_1,\; p_2(t) = \cosh\omega t p_2 + \sinh\omega t p_1$$

Es fácil ver que $x_1(t) \pm x_2(t) = (x_1 \pm x_2)e^{\pm\omega t}$ y $p_1(t) \pm p_2(t) = (p_1 \pm p_2)e^{\mp\omega t}$. Cuando t es muy grande resulta en $\langle x_1(t)\rangle \simeq \langle x_2(t)\rangle$ y $\langle p_1(t)\rangle \simeq -\langle p_2(t)\rangle$; por lo tanto $\langle x_1(t)\rangle = \left(\frac{\langle x_1\rangle+\langle x_2\rangle}{2}\right)e^{\omega t}$ y $\langle p_1(t)\rangle = \left(\frac{\langle p_1\rangle-\langle p_2\rangle}{2}\right)e^{\omega t}$