1 Construya los estados posibles de

(a) Dos bosones que pueden ocupar dos estados $\{|a\rangle, |b\rangle\}$.
(b) Dos fermiones que pueden ocupar dos estados $\{|a\rangle, |b\rangle\}$.
(c) Tres bosones que pueden ocupar tres estados $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$.
(d) Tres fermiones que pueden ocupar tres estados $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$.
(e) Dos bosones que pueden ocupar tres estados $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$.
(f) Dos fermiones que pueden ocupar tres estados $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$.

2 Considere un pozo de potencial infinito

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

(a) Suponga que dentro del pozo hay dos partículas distinguibles. Escriba el estado fundamental (o una base en caso de estar degenerado) y su respectiva energía.
(b) Suponga que dentro del pozo hay dos bosones de spin 0. Escriba el estado fundamental (o una base en caso de estar degenerado) y su respectiva energía.
(c) Suponga que dentro del pozo hay dos fermiones de spin ½. Escriba el estado fundamental (o una base en caso de estar degenerado) y su respectiva energía. ¿El spin total del sistema puede tomar cualquier valor en el estado fundamental?
(d) Suponga que dentro del pozo hay tres bosones de spin 0. Escriba el estado fundamental (o una base en caso de estar degenerado) y su respectiva energía.
(e) Suponga que dentro del pozo hay tres fermiones de spin ½. Escriba el estado fundamental (o una base en caso de estar degenerado) y su respectiva energía.
(f) Suponga que dentro del pozo hay dos fermiones se spin ½ y se sabe que las dos partículas se encuentra en un estado triplete de spin. Escriba el estado global de menor energía compatible con esta condición e indique el respectivo valor de energía.
(g) Suponga que dentro del pozo hay dos fermiones se spin ½ y se sabe que las dos partículas se encuentra en el estado singlete de spin. Escriba el estado global de menor energía compatible con esta condición e indique el respectivo valor de energía.

Nota: en todos los casos considere que las partículas no interactúan entre sí.
Ayuda: recuerde que los autoestados del pozo infinito son $\{|n\rangle, n \in \mathbb{N}\}$, con energía y funciones de onda respectivamente

$$H|n\rangle = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2mL^2}|n\rangle, \qquad \langle x|n\rangle = \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

3 Se tiene un Hamiltoniano h de una partícula con tres niveles de energía 0, $\hbar\omega$, y $2\hbar\omega$. La única degeneración que tienen estos niveles es debida al spin.

(a) Se colocan tres partículas de spin ½ que no interactúan entre sí. El Hamiltoniano del sistema de tres fermiones es $H = h_1 + h_2 + h_3$, donde los números indican la n-ésima partícula. Halle todos los autovalores y autovectores de H, especificando el grado de degeneración de los niveles.
(b) Repita el cálculo para un conjunto de tres bosones de spin 0.

4 Considere tres partículas idénticas de spin 1 que no interactúan entre sí.

(a) Suponga que se sabe que la parte espacial del estado es simétrica respecto del intercambio de cualquier par de partículas. Construya entonces, si es posible, los estados de spin normalizados en los siguientes tres casos:

(I) Las tres partículas están en el estado $m = +\hbar$.

(II) Dos de ellas están en el estado $m = +\hbar$ y la otra en $m = 0$.

(III) Las tres están en diferentes estados de spin.

(b) Resuelva el ítem (a) pero para el caso cuando la parte espacial es antisimétrica ante el intercambio de cualquier par de partículas.

5 Demuestre que dos fermiones idénticos en una misma órbita y con igual impulso angular $j_1 = j_2 = j$, sólo se pueden acoplar a impulso angular total J tal que $2j + J$ sea impar. Use la antisimetría de la función de onda, o sea $\phi(j^2, m, m') = -\phi(j^2, m', m)$ y la propiedad de los Clebsch-Gordan

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | JM \rangle \, .$$

6 Demuestre que dos bosones en una misma órbita y con un mismo impulso angular orbital $l_1 = l_2 = l$, sólo se pueden acoplar a impulso angular total L par. Use la simetría de la función de onda, o sea $\phi(l^2, m, m') = \phi(l^2, m', m)$ y la propiedad de los Clebsch-Gordan

$$\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | LM \rangle = (-1)^{l_1 + l_2 - L} \langle l_2 m_2 l_1 m_1 | LM \rangle \, .$$

Indique similitudes y diferencias con el caso de dos fermiones idénticos de espín 1/2.

7 **"Interacción" de intercambio: "repulsión" y "atracción" de partículas cuánticas idénticas**. Considere dos partículas y sea $D = \left\langle (x_1 - x_2)^2 \right\rangle$ la distancia cuadrática media entre las partículas, con x_1 y x_2 la posición de cada partícula. Supongamos que las partículas están en dos estados ortogonales $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$. Calcule entonces la distancia cuadrática media en los casos en que

(a) La partículas son distinguibles.

(b) Las partículas son bosones indistinguibles.

(c) Las partículas son fermiones indistinguibles.

Compare los resultados e interprete.

8 Dos fermiones idénticos de spin 1/2 se mueven en una dimensión sometidos a un pozo de potencial infinito

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

(a) Resuelva el problema considerando a las partículas indistinguibles. Exprese las funciones de onda espacial y de spín del sistema si las partículas no interactúan entre sí.

(b) Considere ahora un potencial de interacción repulsivo entre ambos fermiones, de la forma

$$V(x_1, x_2) = -V_0 \delta(x_1 - x_2).$$

Resuelva el problema a primer orden en la perturbación W para el estado fundamental y el primer estado excitado, analizando las características de la contribución debida a la antisimetrización de la función de onda (término de intercambio).