Tema 4

Técnicas de contar

La *combinatoria* trata de contar el número de elementos de conjuntos finitos. Entre sus aplicaciones prácticas podemos citar por una parte el cálculo de probabilidades, por cuanto se cuentan casos favorables y casos posibles, y por otra el cálculo de la complejidad o tiempo de ejecución de un algoritmo, por cuanto se cuenta el número de operaciones que se realizan en el procedimiento. Cuando se trata de estimar el número medio o esperado de operaciones que realiza un programa, se unen ambas aplicaciones, es decir, complejidad algorítmica y cálculo de probabilidades.

4.1. Cardinales de conjuntos. Principios elementales

Definición 4.1.1.– *Sea A un conjunto finito. Al número de elementos de A se le denomina cardinal de A y se denota $|A|$.*

Enunciamos a continuación las propiedades básicas para el cálculo de cardinales.

- $|\emptyset| = 0$
- $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$. En particular, si $B \subseteq A$ entonces $|A \setminus B| = |A| - |B|$.
- *Principio de adición.* Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

- *Principio de inclusión-exclusión.* Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos entonces

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

- *Principio de multiplicación.* Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos entonces

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

- *Principio de distribución.* También conocido como *principio del palomar*, su versión más débil nos dice que "si m palomas ocupan n nidos y $m > n$, entonces algún nido contiene más de una paloma". Generalizando este enunciado, el principio de distribución nos dice que

  "Sean m, n y q números naturales. Si se reparten m objetos en n cajas y $q \cdot n < m$, entonces al menos una caja ha de contener más de q objetos".

Ejercicios:

1. Cada usuario de un servidor de Internet tiene una palabra clave para acceder a dicho servidor. Dicha palabra clave está formada por cuatro caracteres, a elegir entre 26 letras mayúsculas y 10 dígitos $\{0, 1, \ldots, 9\}$. ¿Cuántas palabras claves que tengan al menos un dígito se pueden formar?

2. ¿Cuántos enteros n, con $1 \leq n \leq 1000$, son divisibles por 2, ó por 3 ó por 5?

3. Probar que en un conjunto de 100 números naturales hay al menos 5 que son congruentes entre sí módulo 21.

4.2. Contar en tablas

En ocasiones, el problema de contar elementos de un conjunto se resuelve mediante el método de *contar en tablas*.

Sean $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ conjuntos finitos no vacíos y sea T un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Si en un cuadro de doble entrada disponemos los elementos de A en una entrada y los elementos de B en la otra, podemos representar T de la siguiente forma: si $(a_i, b_j) \in T$ escribimos $t_{ij} = 1$ en la casilla correspondiente y si $(a_i, b_j) \notin T$ escribimos $t_{ij} = 0$. Se verifica que

$$|T| = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} t_{ij}) = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} t_{ij})$$

Ejercicio: Cada alumno de una determinada titulación está matriculado en cuatro de las siete asignaturas que se ofertan. Las listas de alumnos por asignaturas están constituidas por 42, 35, 30, 30, 20, 26 y 17 alumnos respectivamente. ¿Cuántos alumnos hay en total?

4.3. Variaciones. Permutaciones. Combinaciones

En esta sección abordamos el siguiente problema: dado un conjunto con n objetos, ¿cuál es el número de colecciones de m objetos que se pueden formar eligiéndolos entre los n del conjunto? La respuesta depende de dos factores:

- ¿Importa el orden en el que coleccionemos los m objetos?
- ¿Puede haber elementos repetidos en la colección de m objetos?

Las posibles respuestas dan lugar a cuatro tipo de colecciones: *variaciones*, *variaciones con repetición*, *combinaciones* y *combinaciones con repetición*. Como caso particular de las variaciones estudiaremos también las *permutaciones*.

4.3.1. Variaciones. Variaciones con repetición

Definición 4.3.1.– *Una variación de n elementos tomados de m en m ($m \leq n$) es una lista ordenada de m elementos distintos elegidos entre los n dados. También se suele llamar variación de orden m de n elementos.*

El principio de multiplicación nos lleva al siguiente resultado.

Teorema 4.3.2.– *El número $V_{n,m}$ de variaciones de n elementos tomados de m en m es*

$$V_{n,m} = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Hasta ahora hemos considerado listas ordenadas formadas por objetos distintos. Pero hay listas ordenadas en las que se permite que alguno de los objetos esté repetido (por ejemplo, la quiniela de fútbol). Estudiamos a continuación este tipo de listas.

Definición 4.3.3.– *Una variación con repetición de n elementos tomados de m en m es una lista ordenada de m elementos, no necesariamente distintos, elegidos entre los n dados. También se suele llamar variación con repetición de orden m de n elementos.*

Aplicando el principio de multiplicación obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.4.– *El número $VR_{n,m}$ de variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m es*

$$VR_{n,m} = n^m$$

Ejercicio: ¿Cuántas matrículas de coches con 4 dígitos y 3 letras (elegidas de un alfabeto de 20 letras) se pueden formar? ¿Cuántas de ellas tienen al menos una letra repetida?

4.3.2. Permutaciones. Permutaciones circulares. Permutaciones con repetición

Un caso particular de las variaciones resulta cuando $m = n$. En este caso hablamos de *permutaciones.*

Definición 4.3.5.– *Sea A un conjunto con $|A| = n$. Una permutación de los n elementos de A es una lista ordenada de dichos elementos.*

Si denotamos P_n al número de permutaciones de n elementos, entonces

$$P_n = V_{n,n} = n!$$

Si se ordenan los n elementos de un conjunto formando un círculo en lugar de una lista o fila, tenemos las llamadas *permutaciones circulares.* En ellas lo que importa es la posición relativa entre los elementos. El número PC_n de permutaciones circulares de n elementos es

$$PC_n = P_{n-1} = (n-1)!$$

Otra variante del problema de calcular ordenaciones se tiene cuando algunos de los objetos a ordenar son iguales. Tenemos entonces las llamadas *permutaciones con repetición.*

Definición 4.3.6.– *Una permutación con repetición de una colección de n elementos donde hay k grupos de elementos iguales entre sí, con $m_1, \ldots, m_k$ elementos respectivamente ($m_1 + \cdots + m_k = n$), es una lista ordenada de esos n elementos.*

Teorema 4.3.7.– *El número $P_n^{m_1,\ldots,m_k}$ de permutaciones con repetición de n elementos donde hay m_1 elementos iguales entre sí, m_2 elementos iguales entre sí,..., m_k elementos iguales entre sí, con $m_1 + \cdots + m_k = n$, es*

$$P_n^{m_1,\ldots,m_k} = \frac{n!}{m_1! \cdots m_k!}$$

Ejercicios:

1. ¿De cuántas formas pueden organizarse un grupo de 7 personas

   a) en una fila de 7 asientos?

   b) alrededor de una mesa redonda de 7 asientos?

2. Si tenemos 4 libros de Matemáticas y 3 de Física, ¿de cuántas formas se pueden colocar en un estante de manera que los libros de la misma materia estén juntos?

3. En la casilla inferior izquierda de un tablero de ajedrez (8x8 casillas) situamos un rey con la intención de ir moviéndolo hasta que alcance la casilla superior derecha. Si los únicos movimientos permitidos son una casilla hacia la derecha o una casilla hacia arriba, ¿cuántos son los caminos distintos que el rey puede hacer hasta llegar a la casilla superior derecha?

4.3.3. Combinaciones. Combinaciones con repetición

Hemos estudiado hasta ahora las colecciones de m objetos elegidos entre n dados en las que el orden en que estos objetos son elegidos es importante. Pero hay ocasiones en las que el orden de elección es irrelevante. Este tipo de colecciones se llaman *combinaciones*. Comenzamos estudiando aquellas en las que no se permiten repeticiones.

Definición 4.3.8.– *Una combinación de n elementos tomados de m en m $(m \leq n)$ es un subconjunto de m elementos distintos elegidos entre los n dados. También se suele llamar combinación de orden m de n elementos.*

Teorema 4.3.9.– *El número $C_{n,m}$ de combinaciones de n elementos tomados de m en m es*

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Al número $\binom{n}{m}$ se le denomina también *número combinatorio* y se lee "n sobre m".

Si permitimos que en las colecciones (no ordenadas) de objetos que formamos existan elementos repetidos tenemos *combinaciones con repetición*.

Definición 4.3.10.– *Una combinación con repetición de n elementos tomados de m en m es una colección de m elementos, no necesariamente distintos, elegidos entre los n dados. También se suele llamar combinación con repetición de orden m de n elementos.*

Teorema 4.3.11.– *El número $CR_{n,m}$ de combinaciones con repetición de n elementos tomados de m en m es*

$$CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m}$$

Teorema 4.3.12.– *El número $CR_{n,m}$ coincide con el número de formas de repartir m objetos iguales en n urnas distinguibles.*

Ejercicios:

1. Definimos *distancia* entre dos secuencias binarias de longitud n como el número de lugares en que difieren. ¿Cuántas secuencias están a una distancia d, $1 \leq d \leq 3$, de una secuencia de longitud 5 dada?

2. Una ficha de un n-dominó es una pieza formada por dos cuadrados unidos por un lado. Cada cuadrado puede ser blanco o contener de uno a n puntos. Por ejemplo, el dominó usual es un 6-dominó. ¿Cuántas fichas diferentes tiene un n-dominó?

3. Tenemos 20 bolas iguales para repartir en 4 cajas numeradas.

   a) ¿De cuántas formas se puede hacer el reparto?

   b) Calcular el número de formas de repartir las bolas en las cajas de forma que al menos dos cajas queden vacías.

Propiedades de los números combinatorios

Los números combinatorios verifican las siguientes propiedades:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$
- *Fórmula de Pascal*:

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

- *Teorema del binomio*:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$