# Física Teórica 3
# Serie 8: Bosones y cuasipartículas

$1^{er}$ Cuatrimestre de 2013

**Problema 1:** Suponga un gas ideal de bosones en dos dimensiones. Muestre que no se produce condensación para ningún valor de $N/A$, donde $N$ es el número de partículas y $A$ es el área.

**Problema 2:** Considere un gas de Bose-Einstein ideal cuyas partículas tienen grados de libertad internos. Suponiendo que sólo es necesario tomar en cuenta un nivel interno excitado de energía $\varepsilon_1$ por encima del nivel fundamental con $E = 0$, muestre que la temperatura crítica $T_c$ está relacionada con la temperatura crítica $T_c^o$ de un gas sin grados de libertad internos por

$$\left(\frac{T_c^o}{T_c}\right)^{3/2} = 1 + \frac{1}{2{,}612}(e^{-\varepsilon_1/k_B T_c} + \cdots)$$

**Problema 3:** Sea un gas de bosones de spin $s = 1$, con temperatura $T$ y densidad $1/v$. Las partículas tienen un momento magnético $\mu = m_o s_z$. Si se aplica al sistema un campo magnético $H$:

a) Escribir las energías de los autoestados de las partículas y los correspondientes números de ocupación, definiendo la *fugacidad efectiva* $z' = \exp[\beta(\mu + m_o H)] = e^{\beta\mu}e^x$.

b) Escribir las expresiones de la ecuación de estado en forma paramétrica. Esto es, $\beta pV$ y $N$ como funciones de $z'$.

c) Interpretar los límites $x \to 0$ y $x \to \infty$, donde $x = \beta m_o H$.

d) Considerar el caso $x \gg 1$. Obtener una expresión para la temperatura de condensación $T_c$ utilizando los datos: $\lambda_{c0}^3/3v = 2{,}612 = g_{3/2}(1)$ que define la temperatura crítica $T_c^o$ del gas no perturbado (recordar que se cumple: $g_{3/2}(z) \simeq z$ si $z \ll 1$).

**Problema 4:** Se tiene un gas de bosones con una fase condensada. Suponiendo que la población del fundamental $\langle N_o \rangle > 1$ es mucho menor que el número total de partículas $\langle N \rangle$, calcule la entropía, analice la contribución de la fase condensada e interprete el resultado. Recuerde que sin condensación se cumple que

$$\beta PV = \langle N \rangle \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \qquad , \qquad \langle E \rangle = \frac{3}{2}PV$$

**Problema 5:** La condensación de Bose-Einstein fue experimentalmente obtenida por primera vez en 1995, confinando a las partículas mediante potenciales armónicos. En este problema estudiaremos este tipo de confinamiento. Para hallar la densidad de estados cuánticos de una partícula que se halla sometida a un potencial de la forma $m/2(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$ será útil primeramente considerar el caso unidimensional. Sabemos que en 1-D el espectro de energías resulta equiespaciado, de manera que la densidad de estados será una constante. Este resultado puede deducirse alternativamente de la siguiente manera:

a) La energía de la partícula $\varepsilon$ puede escribirse en la forma $R^2 = X^2 + Y^2$, siendo $R^2 = \varepsilon$, $X^2 = m\omega^2 x^2/2$ e $Y^2 = p^2/2m$. El número de estados $dxdp/h$ resulta así igual, a menos de un factor, al elemento de área en cartesianas $dXdY$. A su vez el número de estados que nos interesa $D(\varepsilon)d\varepsilon$ resultará entonces igual *a menos del mismo factor,* al elemento de área en polares (anillo) $2\pi RdR$. Halle la densidad de estados mediante este argumento y verifique que se obtiene el resultado correspondiente al espectro equiespaciado.

b) El tratamiento anterior puede extenderse fácilmente al caso 3-D, donde el número de estados $D(\varepsilon)d\varepsilon$ resultará así proporcional al elemento de volumen correspondiente a un cascarón esférico en 6-D. Sabiendo que el volumen de una esfera en 6-D vale $\pi^3 R^6/6$, calcule entonces la densidad de estados.

c) Cuando el potencial químico se aproxima a la energía del nivel fundamental, el número de partículas en dicho estado se vuelve macroscópico ¿Por qué?. Calcule bajo esas condiciones cuántas partículas se encontrarán por encima del nivel fundamental.

d) Halle la temperatura crítica y discuta el límite termodinámico.

e) Calcule la energía del gas para temperaturas por debajo de la crítica.

**Problema 6:** Considere un sólido de **n** dimensiones con excitaciones que tienen una relación de dispersión $\omega = \alpha k^s$ donde $\omega$ es la frecuencia angular, $k$ el módulo del vector de onda y $\alpha$ una constante. Cada excitación contribuye a la energía con $\varepsilon = \hbar\omega$.

a) Calcule la densidad de estados $g(\omega)$ en la aproximación de Debye, es decir considerando al sólido como continuo. Escriba la expresión para la energía del sistema.

b) Demuestre que para temperaturas muy bajas la dependencia del calor específico con la temperatura es $C_v \sim T^{\,n/s}$.

c) ¿Cuál es la dependencia de $C_v$ con la temperatura en el límite de temperaturas altas? En el mismo lí mite ¿Cómo depende de $\hbar$? No hace falta hacer cuentas.
Note que para $n = 3$, $s = 1$ este es similar al problema para fotones: $g(\omega) = \gamma \frac{V\omega^2}{2\pi^2 c^3}$ , $\gamma = 2$ (número de polarizaciones), con la única diferencia de que ahora existe una $\omega_{\text{max}}$.

**Problema 7:** Se tiene un monocristal de sodio metálico. Cada sodio tiene un solo electrón que contribuye a la conducción. Haremos la aproximación de que los electrones no interactúan entre sí y tampoco con el cristal, de forma tal que pueden considerarse como libres. La única contribución al calor específico que tendremos en cuenta será la proveniente de las vibraciones de la red y de la energía cinética de los electrones de conducción.

a) Encuentre la temperatura de Debye $T_D$ correspondiente.

b) Encuentre la temperatura de Fermi $T_F$ correspondiente.

c) ¿Cómo será la dependencia de $C_V$ con la temperatura cuando $T \to 0$?

d) ¿Cuánto valdrá aproximadamente $C_V$ a temperatura ambiente?
**Datos:**
Densidad del sodio metálico $\rho_{\text{Na}} = 1{,}6 \times 10^{23} cm^{-3}$
Velocidad del sonido en el sodio metálico $c_{\text{Na}} \simeq 5000 m/s$
$k_B = 1,3\,10^{-23} Joule/K$ $\qquad \hbar = 10^{-34} Joule \cdot s$ y
masa del electrón $= 9{,}1 \times 10^{-28} g$