Física Teórica 3
Serie 10: Ecuación de Boltzmann

1^{er} Cuatrimestre de 2013

Problema 1: Suponga un gas clásico formado por N partículas. Sea $f(\vec{x},\vec{v},t)$ la función de distribución de una partícula ($\int\int\ d^3x\, d^3v\, f(\vec{x},\vec{v},t) = N$) y $\alpha(\vec{x},\vec{v},t)$ una cierta magnitud asociada a una partícula del gas. Escriba las expresiones correspondientes a:

a) Densidad de partículas en el punto $\vec{x}$ y al tiempo t.

b) Valor medio de α en el punto $\vec{x}$ y al tiempo t.

c) Flujo de α a través de un elemento de área de normal $\hat{\jmath}$ que se mueve con velocidad $\vec{u_0}$ (usualmente se toma $\vec{u_0} = 0$ ó $\vec{u_0} \equiv$velocidad media del gas).
Como casos particulares de flujo considere:

   I) La densidad de corriente (flujo de carga, $\vec{u_0} = 0$)

   II) El flujo térmico (flujo de energía cinética, $\vec{u_0} = 0$).

   III) El llamado *tensor de presión*, el cual se define como el tensor simétrico cuya componente i,j viene dada por el flujo de componente $\hat{\imath}$ de impulso lineal referido a la velocidad media del gas ($\alpha(\vec{x},\vec{v},t) = m(v_i - \langle v_i\rangle)$), a través de un elemento de área de normal $\hat{\jmath}$ que se mueve con la velocidad media del gas ($\vec{u_0} = \langle\vec{v}\rangle$).

d) Función de distribución de equilibrio suponiendo que actúa sobre las partículas un potencial externo $V(\vec{x})$.

Problema 2: Demostrar que la integral en el espacio de velocidades del término de colisión es idénticamente nula si y sólo si se cumple la ecuación de continuidad.
Nota: suponga que la fuerza exterior actuante sobre las partículas cumple $\frac{\partial}{\partial\vec{v}} \cdot \vec{F} = 0$.
Observe que esta condición incluye el caso de una fuerza magnética $\vec{v} \times \vec{B}$.

Problema 3: Calcular la viscosidad y la conductividad térmica de un gas monoatómico diluido. Para ello siga los siguientes pasos:

a) Considere que el fluido se halla encerrado entre dos placas paralelas separadas por una distancia L. La placa en $z = 0$ está quieta, mientras que la placa en $z = L$ se mueve en la dirección $\hat{x}$ con velocidad u_x. Las capas de fluido que se hallan debajo del plano $z =$ cte. ejercen un esfuerzo tangencial P_{zx} (componente zx del tensor de presión) sobre el fluido que se halla por encima de ella.
Si $\partial u_x/\partial z$ es pequeño se cumple que $P_{zx} = -\eta\partial u_x/\partial z$ donde η es el coeficiente de viscosidad.

b) Encuentre una expresión para dicho coeficiente y observe que el mismo es proporcional al tiempo de relajación τ.

c) Considere ahora que el gas está en reposo pero existe un pequeño gradiente de temperatura en la dirección $\hat{z}$.

   I) Calcule el flujo térmico en la situación estacionaria y demuestre que es proporcional a $-\partial T/\partial z$.

II) Calcule el coeficiente de proporcionalidad (conductividad térmica κ).
Ayuda: considere que f^o es una distribución Maxwelliana con $n = n(z)$ y $\beta = \beta(z)$. Relacione $\partial n(z)/\partial z$ con $\partial\beta/\partial z$ pidiendo que $\langle v_z\rangle = 0$. Esto es, que no hay convección.

d) Halle el cociente κ/η y vea que es independiente de T y de τ.

Problema 4: Calcule, utilizando la *ecuación de Boltzmann* en la aproximación de tiempo de relajación, la conductividad eléctrica de un gas Maxwelliano de electrones con un fondo iónico neutralizado. Esta es una buena aproximación para un plasma: suponer los iones fijos y que la corriente es debida sólo a los electrones.

Problema 5: Considere un gas Maxwelliano en estado estacionario sometido a un pequeño gradiente de temperatura unidimensional. La densidad de partículas es homogénea.

a) Proponga como solución de la ecuación de Boltzmann una Maxwelliana local (con $T = T(z)$) más una pequeña corrección.

b) Calcule la velocidad media e interprete el resultado.

c) Escriba la ecuación de continuidad para ese gas.

d) A partir de lo obtenido en b) y c) deduzca la dependencia de T con z y también la de la presión con z.

e) Calcule el flujo térmico y compare con lo obtenido en el problema 3 b).

Problema 6: Sobre una chapa conductora se aplican un campo magnético en la dirección $\hat{z}$ y un campo eléctrico según $\hat{x}$. El efecto resultante es conocido como *efecto Hall.* Demostrar que para el caso isotérmico, el coeficiente *Hall* $R_H = \frac{|E_y|}{J_x H_z}$ viene dado por $R_H = 1/nec$.

Problema 7: Suponga un recipiente de paredes adiabáticas y tapas mantenidas a distintas temperaturas (T_1y T_2), el cual contiene un gas Maxwelliano en estado estacionario. Tenga en cuenta además, la acción de un campo gravitatorio uniforme que actúa en dirección perpendicular a las tapas.

a) Calcule el flujo térmico en función de la masa de las partículas m, su densidad n, la temperatura T, su gradiente dT/dz y el tiempo de relajación τ.

b) Utilizando la condición de que el flujo térmico debe ser uniforme (explique por qué), demuestre que la temperatura debe satisfacer una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2T}{dz^2} = f(T)\frac{dT}{dz}$$

y halle $f(T)$.

c) Dibuje gráficos cualitativos de $T(z)$ distinguiendo los casos $T_1 > T_2$ y $T_2 < T_1$ y compárelos con el caso sin gravedad.

Problema 8: Una caja de paredes perfectamente reflectantes se encuentra dividida en dos compartimentos A y B. Inicialmente, un gas se encuentra confinado en equilibrio en la parte A a temperatura TA. Se hace un pequeño agujero de sección a en la pared que divide ambos compartimentos. El tamaño del agujero es mucho más pequeño que el camino libre entre las moléculas y se mantiene abierto durante un cierto tiempo t, luego del cuál es sellado. Luego de un tiempo más, el gas que escapó alcanza el equilibrio:

a) Encuentre el número de moléculas NB en el compartimento B. Considere que la distribución de velocidades en A no se altera por la migración de partículas a B.

b) Encuentre la temperatura a la cuál se equilibran las moléculas en B, TB.

Ayuda: para esta parte podría usar el Teorema de Equipartición de la Energía.

Problema 9: Considere una cantidad $\xi(p_1, q_1, t)$ conservada en una colisión de dos partículas, es decir

$$\chi(p_1, q, t) + \chi(p_2, q, t) = \chi(p_1', q, t) + \chi(p_2', q, t),$$

siendo p_i y p_i' los momentos antes y luego de la colisión respectivamente.

a) Demuestre que

$$\int d^3p \;\; \chi(p, q, t) \frac{df}{dt}|_{coll(p,q,t)} = 0,$$

para cualquiera de dichas cantidades.

b) A partir del resultado demostrado en el ítem anterior deduzca la ley de conservación general

$$\partial_t(n < \chi >) + \partial_\alpha(n < \frac{p_\alpha}{m}\chi >) - n < \partial_t\chi > -n < \frac{p_\alpha}{m}\partial_\alpha\chi > -nF_\alpha < \frac{\partial\chi}{\partial p_\alpha} >= 0.$$

c) Especialize el resultado anterior para el caso $\xi = 1$, $\xi = p_i$ y $\xi = e$ siendo e la energía por partícula del sistema, y deduzca las ecuaciones de la hidrodinámica.