Física Teórica 3
Serie 12: Transiciones de fase y modelo de Ising

1^{er} Cuatrimestre de 2013

Problema 1: Considere un modelo de Ising unidimensional formado por N espines. Asumiendo que el campo magnético H no nulo, y las condiciones periódicas $s_i = s_{i+N}$.

a) Halle la función de partición del sistema.

b) Halle la magnetización media y evalúe el límite de campo nulo para dicha magnetización.

Problema 2: Considere una red bidimensional con $N = N_x \times N_y$ sitios. Considerando solo interacción espín-espín entre primeros vecinos, la energía de una configuración dada viene dada por

$$E = J \sum_{<i,j>} s_i s_j - H \sum_i s_i$$

con $i = (i_x, i_y)$ y $s_i = \pm 1$, siendo H un campo magnético externo (modelo de Ising). Asumiendo que $J > 0$:

a) Que interpretación física tiene la constante J?

b) Muestre que para $H = 0$ el estado fundamental se corresponde con tener todos los espines alineados en una sola dirección (fase ordenada).

c) Suponga ahora que el sistema se halla en el estado fundamental , y que se crea una gota de perímetro L con todos los espines alineados en dirección opuesta. Demuestre que el costo energético para crear dicha gota es

$$\Delta E = 2JL.$$

d) Demuestre que el número n_L de gotas posibles con un perímetro L dado satisface la desigualdad

$$n_L < 4^L.$$

e) A partir de los ítems anteriores, estime la temperatura para la cual la función de partición del sistema diverge. Interprete el resultado obtenido.

Problema 3: Considere un modelo de Ising unidimensional con campo $B = 0$ con N espines. El estado fundamental se corresponde con todos los espines alineados. Sea $|\psi_n>$ el estado correspondiente a tener todos los espines alineados, excepto el espín ubicado en el sitio n.

a) Halle la autofunciónes $|\psi>$ del hamiltoniano del sistema de la forma $|\psi> = \sum a_n |\psi_n>$, siendo a_n constantes a determinar.

b) Muestre que las autovalores correspondientes son

$$E_1(k) = 4J\Big[1 - \cos(ka)\Big], \qquad k = \frac{2\pi l}{Na}.$$

siendo a el espacio entre espines y l un entero tal que $-N \leq 2l \leq N$, y que las autofunciones describen una onda plana (onda de espín).

c) Halle la relación de dispersión para k pequeño.

d) Repita el cálculo anterior para dos y tres dimensiones .

e) Calcule el calor específico para temperaturas bajas para las cuasipartículas descriptas en los ítems anteriores.

Problema 4: En la aproximación de campo medio para un sistema de Ising, halle los exponentes críticos de las siguientes magnitudes termodinámicas:

a) La magnetización media a campo nulo, que se comporta como $M(T; B = 0) \sim (T_c - T)^\beta$ para $T < T_c$.

b) La magnetización media en la temperatura crítica, que se comporta como $M(T_c; B) \sim B^{1/\delta}$ para $B \to 0$.

c) La susceptibilidad magnética $\xi(T; B = 0)$, la cual diverge como $(T_c - T)$ para $T < T_c$.

Problema 5: Dado un sistema en d dimensiones en las cercanías de un punto crítico a temperatura T_c, denotamos con α, β, γ y δ los exponentes críticos

$$C \sim |t|^{-\alpha}, \qquad M \sim |t|^{\beta}, \qquad \xi \sim |t|^{-\gamma}, \qquad M \sim H^{1/\delta},$$

siendo

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}.$$

a) Mostrar que $f = F/kTV_d$, siendo F la energía libre de Gibbs tiene dimensión L^{-d}.

b) Mediante la hipótesis de escala, denotando $\xi \sim |t|^{-\nu}$ la longitud de correlación y asumiendo que la magnetización por unidad de volumen tiene las dimensiones estándar $[M/V] = L^{2-d}$ muestre que los exponentes críticos satisfacen las relaciónes de Fischer-Josephson-Rushbrooke-Widom dadas por

$$2 - \alpha = \nu d, \qquad \beta = -\frac{\nu}{2}(2 - d),$$

$$\gamma = 2\nu, \qquad \beta\delta = -\frac{\nu}{2}(2 + d).$$

c) Repita el punto anterior asumiendo que M/V adquiere una dimensión anómala η, es decir que $[M/V] = L^{2-d-\eta}$.