

Física Teórica 3 – 1er. cuatrimestre de 2012

Primer recuperatorio (18/7)

Problema 1. Considere un sistema de N partículas idénticas distinguibles, cada una de las cuales tiene dos niveles de energía, 0 y $\epsilon > 0$. El nivel de energía superior tiene una degeneración g , mientras que el nivel más bajo es no degenerado.

- (a) Usando el ensamble microcanónico, encuentre el número de partículas en cada nivel de energía en función de la temperatura.
- (b) Suponga que $g = 2$ y que el sistema está en equilibrio con $3/4$ de las partículas en el nivel ϵ . Se pone al sistema en contacto con un foco térmico a 500 K. ¿En qué dirección se produce el flujo de calor?

Problema 2. Un gas bidimensional está compuesto por N electrones, numerados de 1 a N , y N positrones, numerados de $N + 1$ a $2N$, contenidos en una caja cuadrada de lado L y área $\mathcal{A} = L^2$. Se asume que las partículas se comportan clásicamente y que interactúan a través del potencial de Coulomb bidimensional; para cada par de partículas con $i \neq j$ la energía de interacción es

$$U_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -c_i c_j \log |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|,$$

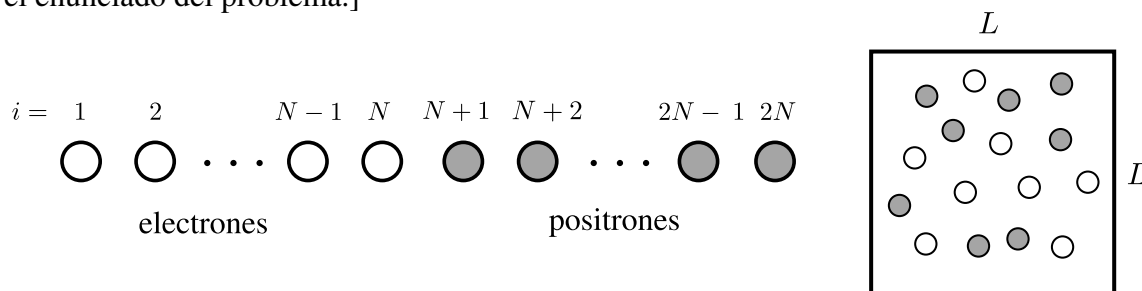
donde c_i es igual a q para los electrones y $-q$ para los positrones.

- (a) Escriba la función de partición canónica del sistema como un producto $Z = Z_p Z_r$, donde Z_p está asociada a la parte traslacional (cinética) de la energía y Z_r a la parte configuracional (potencial).
- (b) Calcule Z_p explícitamente.
- (c) Escriba Z_r como la integral de una productoria de factores exponenciales, cada uno asociado a la interacción de un sólo par de partículas.
- (d) ¿Cuántos pares hay con $c_i c_j = q^2$? ¿Cuántos con $c_i c_j = -q^2$?
- (e) Mediante un cambio elemental de las variables de integración en Z_r , muestre que toda la dependencia en el área puede factorizarse en la forma

$$Z_r = \mathcal{A}^{2N - \beta q^2 N/2} \times f(N, \beta),$$

donde $f(N, \beta)$ es una integral adimensional que depende sólo de la temperatura y de N .

- (f) Calcule la presión del gas y gráfiquela en función de T . Explique el comportamiento de la presión a altas y bajas temperaturas. [Ayuda: todos los resultados necesarios para calcular la presión están dados en el enunciado del problema.]



Problema 3. En una caja pueden aparecer partículas espontáneamente. Cuantas más partículas hay, más alta es la probabilidad de que aparezca una nueva partícula. Si hay n partículas, la probabilidad por unidad de tiempo de que aparezca una nueva partículas es $\alpha(n + 1)$, donde α es una constante positiva.

- (a) Escriba la ecuación maestra para $P_n(t)$, la probabilidad de que haya n partículas a tiempo t .
- (b) Escriba la ecuación diferencial que satisface la función generatriz.
- (c) Demuestre que la solución de la ecuación anterior puede escribirse como

$$F(z, t) = \frac{1}{z} f\left(e^{\beta t} \frac{z-1}{z}\right),$$

y dé el valor de β .

- (d) Encuentre F para la condición inicial en la que a tiempo $t = 0$ la caja está vacía.
- (e) Para la misma condición inicial, encuentre el número medio de partículas como función del tiempo.