Segundo parcial de Física Teórica 3
Primer cuatrimestre del 2013

Problema 1: Considere un metal cuya superficie se halla en contacto con aire y puede emitir o absorber electrones. Las emisiones o absorciones son estadísticamente independientes. La probabilidad de emisión en un tiempo dt es λdt y la de absorción es βdt. Sea $P_n(t)$ la probabilidad de que transcurrido un tiempo t la cantidad de electrones en el metal difiera en n de la inicial (n puede tomar valores positivos (pérdida) o negativos (ganancia)).

1. Halle la ecuación que describe la evolución de $P_n(t)$ en función de t.
2. Halle una expresión para $P_n(t)$, asumiendo que $P_n(t=0) = \delta_{n,0}$.
3. Calcule el valor medio $< n > (t)$ y $< n^2 > (t)$ y su comportamiento para tiempos largos.

Problema 2: Considere un fluído incompresible (densidad uniforme) contenido en un tanque de sección arbitraria y profundidad L, en presencia de un campo gravitatorio uniforme.

1. ¿Qué puede decir de $< v_z >$ como función de z?
2. Calcule la temperatura en función de la profundidad $T(z)$.
3. Si se realiza un orificio pequeño en una de las paredes laterales a una profundidad $L/2$: con qué velocidad media escapan las partículas del tanque? (Asuma que las partículas que escapan no son suficientes para modificar la distribución de velocidades)
4. Calcule la presión que ejerce el fluido sobre el fondo del tanque. (Recuerde que en cada choque con una pared de normal $\hat{n}$ cada molécula entrega un momento $2 \cdot p_{\hat{n}}$)

Problema 3: Se tiene una cadena unidimensional formada por N átomos de masa M y N átomos de masa m. Los átomos de distinto tipo se encuentran alternados (ver figura) y separados por una distancia a. Suponga una interacción entre primeros vecinos con un potencial tipo armónico con constante K. Bajo estas condiciones, las frecuencias de los modos normales vienen dadas por

$$\omega_n^{\pm} = \sqrt{\frac{K}{\mu}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \sigma \sin^2(k_n a)}\right)^{1/2}, \qquad (1)$$

donde $\mu = mM/(m+M)$ es la masa reducida, $\sigma = 4\mu/(m+M)$, $k_n = n\pi/L$,L es el largo total de la cadena y $n = 1, 2, ..., N$. El ω^- corresponde a los modos de la rama acústica y el ω^+ corresponde a los modos de la rama óptica.

1. Considere el caso $m = M$. Verifique que la relación de dispersión para la rama *acústica* este caso es
$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right), \qquad (2)$$
la cual se corresponde con una cadena lineal monatómica.

2. Calcule el $c_v(T)$ de la red para el caso $m = M$ en la aproximación de Debye. Tenga en cuenta que $\omega(k) \approx ck$ para valores de k suficientemente bajos. Evalúe los límites para altas y bajas temperaturas.

3. Muestre que para $M >> m$, se tiene que $\omega(k)$ es aproximadamente una constante. Repita el cálculo del ítem anterior para este caso.

Fórmulas útiles

$$f_o(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) \left(\frac{m\beta(\mathbf{r})}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\beta(\mathbf{r})}{2}[\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{r})]^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\alpha^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}$$

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2x\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \;\; (n \,\epsilon\, \mathbb{N})$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$