Física Teórica 3 − 1er. cuatrimestre de 2012

Primer parcial (14/5)

Problema 1. Un gas está contenido en un recipiente con un pequeño orificio que lo conecta con la atmósfera. La probabilidad por unidad de tiempo de que una partícula en el recipiente escape a la atmósfera a través del orificio es n/Ω. La probabilidad por unidad de tiempo de que una partícula ingrese al recipiente es ρ.

(a) Escriba la ecuación maestra para la probabilidad $p_n(t)$ de encontrar n partículas en el recipiente.

(b) Escriba la ecuación diferencial para la función generatriz $F(z,t)$. Verifique que la solución puede escribirse en la forma $F(z,t) = e^{\alpha z} f\big((1-z)e^{-t/\Omega}\big)$, y encuentre α.

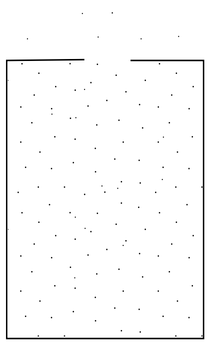
(c) Encuentre $F(z,t)$ y $p_n(t)$ si la condición inicial es que en $t = 0$ hay 0 partículas en el recipiente.

(d) Encuentre la probabilidad $(p_{\mathrm{eq}})_n$ y el número medio de partículas n_{eq} en el equilibrio.

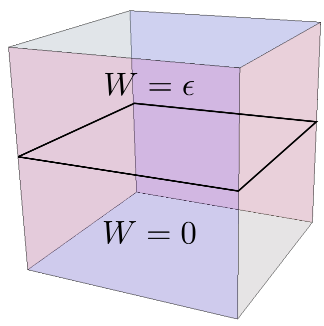
Problema 2. Un gas monoatómico está contenido en una caja cúbica de volumen $2V$, como muestra la figura. Una mitad de la caja está a potencial cero y la otra a potencial $W = \epsilon$. Se pide encontrar, en función de la temperatura, del volumen y del número total de partículas:

i) El potencial químico. ii) La cantidad de partículas en cada mitad de la caja. iii) La energía total.

Problema 3. Un fluido de partículas que interactúan con un potencial repulsivo puede ser modelado como un "gas reticular" del modo siguiente: considere un recipiente dividido en N celdas, cada una de volumen v, comparable al volumen de una partícula. Una celda desocupada o una ocupada por una sola partícula tienen ambas energía cero. Una celda ocupada por 2 partículas tiene energía ϵ, y ninguna celda puede estar ocupada por más de 2 partículas. Usando el ensamble gran canónico encuentre la energía media por celda, la concentración de partículas c (número de partículas dividido por N) y la presión p en términos de la temperatura y del potencial químico. Encuentre expresiones aproximadas para la energía media por celda y para la presión en términos de T y c en los límites en que c es muy pequeña y muy cercana a su máximo valor.



Problema 1



Problema 2

Preguntas.

1. Sea la ecuación de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \int d^3\mathbf{v}_1' d^3\mathbf{v}' d^3\mathbf{v}_1 \ |f' f_1' - f f_1| \ |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \sigma.$$

   (a) ¿Cuál es la condición de equilibrio para f?

   (b) ¿Qué forma tendrá la f de equilibrio?

2. Sea un sistema de dos niveles ϵ_1 y ϵ_2 con $\epsilon_2 > \epsilon_1$. Sean N partículas distinguibles.

   (a) Bosqueje la curva $S(E)$.

   (b) Bosqueje la curva $T(E)$.

3. ¿Cómo es posible que en el caso canónico el peso estadístico esté dado por $\exp\left[-\beta H(p,q)\right]$ y sin embargo el valor de E más probable no necesariamente sea $E = 0$.

4. Sea una cadena de Markov discreta. ¿Cuáles son las propiedades de $\mathbf{Q}$?