

Física Teórica 3 – 2do. cuatrimestre de 2013

Guía 4: Teoría cinética – Ecuación de Boltzmann

1. Considere un gas clásico de partículas de masa m descrito por la función de distribución de una partícula $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, y sea $\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ una magnitud asociada a cada partícula del gas.

- (a) Escriba la expresión que da el valor medio de α en el punto $\mathbf{r}$ a tiempo t .
- (b) Escriba la expresión que da la densidad de α en $\mathbf{r}$ y t .
- (c) ¿Cuál es la función α cuya densidad corresponde a densidad de partículas $n(\mathbf{r}, t)$?

Dado un elemento de área con normal $\mathbf{n}$, en la posición $\mathbf{r}$ a tiempo t , y que se mueve con velocidad $\mathbf{u}_0$, el flujo de la magnitud α a través de este elemento puede escribirse como $\mathbf{j}_\alpha \cdot \mathbf{n}$, donde $\mathbf{j}_\alpha$ es una densidad de corriente asociada a α . (Si α es un vector, $\mathbf{j}_\alpha$ será un tensor, etc.)

- d) Dados $\mathbf{r}$, t y una velocidad $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ escriba la expresión para $\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}, t)$.

Usualmente se consideran dos casos: $\mathbf{u}_0$ igual a la velocidad media del gas, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t)$, o $\mathbf{u}_0$ igual a cero. Como casos particulares, escriba las expresiones para:

- e) La densidad de corriente de partículas, $\mathbf{j}$. Aquí se toma $\mathbf{u}_0 = 0$.
- f) La densidad de corriente de energía cinética, $\mathbf{j}_\epsilon$. Aquí se toma $\mathbf{u}_0 = 0$.
- g) La densidad de corriente térmica, $\mathbf{q}$, definida como la corriente de energía cinética medida en un sistema que se mueve con la velocidad local del gas. Es decir, se toma $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{r}, t)$ pero además se calcula la energía en el sistema localmente en reposo, $\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m} |\mathbf{p} - m\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)|^2$.
- h) El llamado *tensor de presión*, P_{ij} , definido como el tensor simétrico cuya componente i, j es el flujo de la componente i de impulso lineal, medido en el sistema localmente en reposo, a través de un elemento de área de normal $\mathbf{j}$ que se mueve con la velocidad media del gas: $\alpha_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = [p_i - mu_{0i}(\mathbf{r}, t)]$, con $\mathbf{u}_0 = \langle \mathbf{v} \rangle$.

2. Escriba la función de distribución exacta de equilibrio de un gas en un potencial externo $V(\mathbf{r})$, en términos de la función de distribución de equilibrio cuando $V = 0$. Sea n_0 la densidad del aire en la superficie terrestre. Determine la densidad n_z a una altura z suponiendo equilibrio y temperatura uniforme. Desprecie la variación de g con la altura.
3. Demostrar que la integral en el espacio de velocidades del término de colisiones es idénticamente nula si y sólo si se cumple la ecuación de continuidad. *Nota:* suponga que la fuerza exterior actuante sobre las partículas cumple $\nabla_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} = 0$; demuestre que esta condición incluye el caso de la fuerza de Lorentz.

Los siguientes problemas tratan acerca de las aproximaciones de equilibrio local y de tiempo de relajación. La primera corresponde a asumir que la función de distribución del gas es una distribución de Maxwell–Boltzmann local más una corrección δf ,

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{n(\mathbf{r}, t)}{[2\pi mkT(\mathbf{r}, t)]^{3/2}} \exp \left[-\frac{|\mathbf{p} - m\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|^2}{2mkT(\mathbf{r}, t)} \right] + \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t),$$

con tres condiciones suplementarias que fijan los valores de n , $\mathbf{u}$ y T , a saber,

$$\int d^3p \delta f = 0, \quad \int d^3p \mathbf{p} \delta f = 0, \quad \int d^3p \frac{p^2}{2m} \delta f = 0.$$

- 4) Demostrar que las tres condiciones anteriores significan que las funciones n y $\mathbf{u}$ que aparecen en f_0 son la densidad y la velocidad media exactas, y que la densidad de energía cinética exacta es

$$\rho_\epsilon = \frac{3}{2}nkT + \frac{1}{2}nm|\mathbf{u}|^2 \quad (\text{esto define } T \text{ en general}).$$

El integrando en el término de colisiones de la ecuación de Boltzmann es cuadrático en f ,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}} = \int d^3p'_1 d^3p'_2 d^3p_2 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |T_{fi}|^2 (f'_2 f'_1 - f_2 f_1).$$

Antes hemos definido $f = f_0 + \delta f$, así que la combinación de f 's que aparece en el término de colisiones puede escribirse como

$$f'_2 f'_1 - f_2 f_1 = f'_{02} f'_{01} - f'_{02} f'_{01} + \delta f'_2 f'_{01} + f'_{02} \delta f'_1 - \delta f_2 f_{01} - f_{02} \delta f_1 + \delta f'_1 \delta f'_2 - \delta f_2 \delta f_1. \quad (1)$$

- 5) Demostrar por cálculo directo que cualquier distribución de Maxwell–Boltzmann local, con funciones T , $\mathbf{u}$ y n arbitrarias, reemplazada en el término de colisiones integra a cero.

Por lo tanto, la primera contribución en la ecuación (1) no contribuye al término de colisiones. De los otros términos, a más bajo orden se pueden omitir los que son cuadráticos en δf , quedándose sólo con los lineales. De esta forma puede estimarse que $(\partial f / \partial t)_{\text{col}} \sim \delta f$. Esto motiva la siguiente aproximación

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{col}} \approx -\frac{\delta f}{\tau},$$

donde τ es un tiempo microscópico característico, mucho menor que la escala de evolución macroscópica del sistema. En definitiva, la ecuación de Boltzmann en la aproximación de tiempo de relajación es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = -\frac{\delta f}{\tau}.$$

A más bajo orden en τ puede escribirse entonces

$$\delta f = -\tau \left[\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f_0 + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_0 \right].$$

- 6) En la aproximación de equilibrio local y de tiempo de relajación, calcular la viscosidad y la conductividad térmica de un gas monoatómico diluido en estado estacionario. Siga los siguientes pasos:

- (a) Considere que el fluido se halla encerrado entre dos placas paralelas separadas por una distancia L , sin fuerzas externas. La placa en $z = 0$ está quieta, mientras que la placa en $z = L$ se mueve en la dirección x con velocidad u_x . Las capas de fluido que se hallan debajo del plano $z = \text{cte.}$ ejercen un esfuerzo tangencial P_{zx} (componente zx del tensor de presión) sobre el

fluido que se halla por encima de ellas. Si $\partial u_x / \partial z$ es pequeño se cumple que $P_{zx} = -\eta \partial u_x / \partial z$ donde η es el coeficiente de viscosidad. Calcule P_{zx} hasta orden τ y encuentre una expresión para dicho coeficiente. (La expresión es más interesante desde el punto de vista de τ , que es en principio desconocido, que desde el punto de vista de η , que es una magnitud que puede medirse directamente. Conocida η , el cálculo anterior permite obtener τ , y por lo tanto permite tener una idea de las escalas microscópicas involucradas.)

(b) Considere ahora que el gas está en reposo pero que existe un pequeño gradiente de temperatura en la dirección z . Calcule el flujo térmico en la situación estacionaria y demuestre que es proporcional a $-\partial T / \partial z$. El coeficiente de proporcionalidad es la conductividad térmica κ . *Ayuda:* considere que f_0 es una distribución maxwelliana con $n = n(z)$ y $\beta = \beta(z)$. Relacione $\partial n / \partial z$ con $\partial \beta / \partial z$ pidiendo que $\langle v_z \rangle = 0$; es decir, que no haya convección.

(c) Halle el cociente κ / η y vea que es independiente de T y de τ .

7) Calcule, utilizando la ecuación de Boltzmann en la aproximación de tiempo de relajación, la conductividad eléctrica de un gas maxwelliano de electrones con un fondo de iones fijos. Ésta es una buena aproximación para un plasma. *Un largo comentario para un cálculo que termina resolviéndose en tres renglones:* es importante notar que, debido a la disparidad entre las masas de los electrones y de los iones, desde el punto de vista de los electrones los iones son blancos fijos de masa infinita. En estos choques la energía de los electrones se conserva, pero no su impulso. La distribución de equilibrio, que se construye a partir de las cantidades que se conservan en las colisiones, carecerá por lo tanto de un término lineal en el impulso. La aproximación correcta es entonces

$$f = f_0 + \delta f = \frac{n(\mathbf{r})}{[2\pi m k T(\mathbf{r})]^{3/2}} \exp \left[-\frac{p^2}{2m k T(\mathbf{r})} \right] + \delta f,$$

sin término de arrastre, y donde ahora sólo se piden dos condiciones,

$$\int d^3p \delta f = 0, \quad \int d^3p \frac{p^2}{2m} \delta f = 0.$$

(Puede verificarse que para la fuerza de Lorentz, a orden τ se cumplen automáticamente.) Hechas estas salvedades, la aproximación de tiempo de relajación se plantea igual que antes,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = -\frac{\delta f}{\tau}.$$

A orden más bajo y en régimen estacionario se encuentra

$$\delta f = -\tau \left(\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f_0 + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_0 \right).$$

A partir de todo esto demuestre que la velocidad media del gas de electrones a orden τ , cuando $\mathbf{F}$ es la fuerza de Lorentz, $\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{mc} \times \mathbf{B} \right)$, está dada por

$$n\mathbf{u} = -\frac{\tau}{m} \nabla(nkT) + \tau \frac{nq}{m} \mathbf{E}.$$

Multiplicando por q se obtiene la corriente eléctrica; el término proporcional a $\mathbf{E}$ es la conductividad. Al margen de esto, se ve que un gradiente de temperatura también genera una corriente eléctrica.