Física Teórica 3 − 2do. cuatrimestre de 2013

Guía 8: *estadística cuántica II*

Estadística de Bose−Einstein

1. Encontrar la relación entre PV y la energía U para un sistema de bosones idénticos de espín s, en d dimensiones y con una relación entre la energía y el impulso del tipo $\epsilon(\mathbf{p}) = \alpha p^n$.

2. Un sistema está compuesto por N partículas libres. Cada partícula puede estar en dos estados, con energías 0 y $\epsilon > 0$ respectivamente. Calcule la fracción de partículas en cada nivel en estos dos casos: i) las partículas son distinguibles, ii) las partículas son bosones idénticos. Para N fijo, graficar las fracciones en función de T, y viceversa (usar escalas logarítmicas). Demostrar que para $0 < T$, cuando $N \longrightarrow \infty$, la fracción de bosones en el nivel fundamental tiende a 1, mientras que en el sistema de partículas distinguibles es una función no nula de T, independiente de N.

3. Un gas ideal de N bosones está confinado en una región bidimensional de área A. Escriba el número de partículas en los estados excitados, N_e, y el número de partículas en el estado fundamental, N_0, en términos de z, T y A, y muestre que no hay condensación de Bose−Einstein a menos que $T \longrightarrow 0$.

4. Considere un gas ideal de Bose−Einstein cuyas partículas tienen grados de libertad internos. Asuma que sólo es necesario tomar en cuenta el primer nivel interno excitado, con energía ϵ_1 por encima del nivel fundamental de energía $E = 0$. Si la temperatura crítica del gas sin grados de libertad internos es T_c^0, muestre que en los límites en que $\epsilon_1 \gg kT_c^0$ y $\epsilon_1 \ll kT_c^0$ la temperatura crítica del gas que sí tiene grados de libertad internos es, respectivamente,

$$\frac{T_c}{T_c^0} \simeq 1 - \frac{2e^{-\epsilon_1/kT_c^0}}{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}, \qquad \frac{T_c}{T_c^0} \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\left[1 + \frac{2^{4/3}}{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{\pi\epsilon_1}{kT_c^0}\right)^{1/2}\right].$$

Fórmulas útiles:

$$g_\nu(z) = z + \frac{z^2}{2^\nu} + \ldots, \qquad g_\nu\left(e^{-\alpha}\right) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\alpha^{1-\nu}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\zeta(\nu - n)\,\alpha^n.$$

5. Considere un gas de bosones de espín 1, a temperatura T y densidad $1/v$. Si se aplica un campo magnético H, la energía de las partículas adquiere una contribución $-Hm_0s$, donde s puede tomar los valores $-1, 0$ y 1. Asumir que H y m_0 son mayores que cero.

   (a) Escribir las energías de los autoestados de las partículas y los correspondientes números de ocupación, definiendo fugacidades efectivas $z_s = \exp[\beta(\mu + Hm_0s)] = ze^{sx}$.

   (b) Escribir la ecuación de estado en forma paramétrica, es decir, βPV y N como funciones de z y T. Tener en cuenta que puede haber una fase condensada. Interpretar los límites $x \longrightarrow 0$ y $x \longrightarrow \infty$.

   (c) Escribir la ecuación que determina la temperatura de condensación T_c y resolverla de modo aproximado en los casos en que x, evaluada en T_c, sea mucho mayor que 1 o muy próxima a cero. Las fórmulas dadas en el enunciado del problema anterior también pueden ser útiles aquí.

6. Mostrar que la entropía y el calor específico de un gas de bosones 3D y de espín cero están dados por:

$$\frac{S}{kN} = \begin{cases} \dfrac{5}{2}\dfrac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \log z, \\ \\ \dfrac{5}{2}\dfrac{v}{\lambda^3}\, g_{5/2}(1). \end{cases} \qquad \frac{C_V}{kN} = \begin{cases} \dfrac{15}{4}\dfrac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \dfrac{9}{4}\dfrac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}, & T > T_c \\ \\ \dfrac{15}{4}\dfrac{v}{\lambda^3}\, g_{5/2}(1), & T < T_c. \end{cases}$$

7. La condensación de Bose−Einstein fue experimentalmente obtenida por primera vez en 1995, confinando a las partículas mediante potenciales armónicos. Suponga que las partículas están atrapadas en un potencial de la forma $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Los estados de una partícula están dados entonces por 3 números, n_x, n_y y n_z, enteros mayores o iguales que cero, y la energía de cada estado es

$$\epsilon_{n_x,n_y,n_z} = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z).$$

(El cero de energía se ha redefinido para anular la energía del nivel fundamental.)

(a) Escriba el número medio de partículas como una suma sobre los estados de una partícula. Ignorando por ahora los problemas asociados al nivel fundamental, ¿qué condición debe pedirse para poder aproximar la suma por una integral?

(b) La manera más directa de transformar la suma en una integral consiste en escribir una integral para cada una de las sumatorias, sobre n_x, n_y y n_z, respectivamente. La integral tridimensional resultante involucra una función de $n_x + n_y + n_z$, y puede reescribirse de manera más sencilla observando que el integrando es constante sobre planos de la forma $n_x + n_y + n_z = c$, que en el octante $n_x, n_y, n_z > 0$ definen triángulos equiláteros de lado c, con normal $(1,1,1)/\sqrt{3}$. Calcule el volumen infinitesimal que corresponde a cada triángulo en términos de c y dc y rescriba la integral como una integral sobre c. Finalmente, escriba todo en términos de alguna de las funciones $g_\nu(z)$.

(c) Un método alternativo para escribir N surge de observar que el mismo cambio de variables $c = n_x + n_y + n_z$ hecho en la integral triple del ítem anterior podría haber sido hecho antes de pasar de la suma a la integral. En otras palabras, en lugar de sumar sobre n_x, n_y y n_z, podría haberse sumado sobre niveles de energía m, incluyendo una multiplicidad. Calcule el número de estados de una partícula con una dada energía $m\hbar\omega$ y reescriba la suma sobre estados como una suma sobre m. Puesto que se tiene una suma en lugar de tres, el paso a la integral lleva directamente a una integral unidimensional. Reobtenga así el resultado del ítem anterior.

(d) Cuando el potencial químico se aproxima arbitrariamente a la energía del nivel fundamental, el número de partículas en dicho estado se vuelve macroscópico: ¿por qué? Calcule bajo esas condiciones cuántas partículas se encontrarán por encima del nivel fundamental.

(e) Halle la temperatura crítica y discuta el límite termodinámico.

(f) Calcule la energía del gas para temperaturas por debajo de la crítica.

8. Considere un sólido de n dimensiones con excitaciones que tienen una relación de dispersión $\omega = \alpha k^s$, donde ω es la frecuencia angular, k el módulo del vector de onda y α una constante. Cada excitación contribuye a la energía con $\epsilon = \hbar\omega$.

(a) Calcule la densidad de estados $g(\omega)$ en la aproximación de Debye, es decir considerando al sólido como continuo. Escriba la expresión para la energía del sistema.

(b) Demuestre que para temperaturas muy bajas la dependencia del calor específico con la temperatura es $C_V \sim T^{\,n/s}$.

(c) ¿Cuál es la dependencia de C_V con la temperatura en el límite de temperaturas altas? En el mismo límite, ¿cómo depende de $\hbar$? No hace falta hacer cuentas.

9. Se tiene un monocristal de sodio metálico. Cada sodio tiene un solo electrón que contribuye a la conducción. Haremos la aproximación de que los electrones no interactúan entre sí y tampoco con el cristal, de forma tal que pueden considerarse como libres. La única contribución al calor específico que tendremos en cuenta será la proveniente de las vibraciones de la red y de la energía cinética de los electrones de conducción.

   (a) Encuentre la temperatura de Debye.

   (b) Encuentre la temperatura de Fermi.

   (c) ¿Cómo será la dependencia de C_V con la temperatura cuando $T \longrightarrow 0$?

   (d) ¿Cuánto valdrá aproximadamente C_V a temperatura ambiente?

   Datos:

   Densidad del sodio metálico $= 1.6 \times 10^{23}$ cm^{-3}. Velocidad del sonido en el sodio metálico $= 5$ km/s. $k = 1.4 \times 10^{-23}$J/K, $\hbar = 10^{-34}$ J s. Masa del electrón $= 9.1 \times 10^{-31}$ kg.